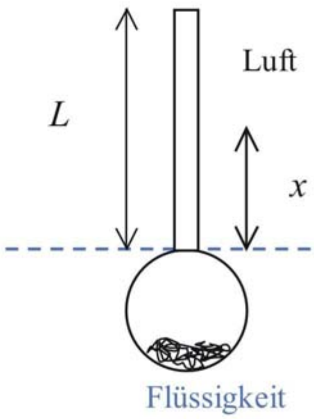
Fachhochschule Hannover | 10.01.2005
Fachbereich Maschinenbau | Zeit: 90 min
Fach: Physik II im WS0405 | Hilfsmittel: Formelsammlung zur Vorlesung

1. Ein Aräometer (Dichtemessgerät für Flüssigkeiten) besteht aus einer Hohlkugel (Durchmesser $D = 5\,cm$) mit aufgesetzter Säule (Durchmesser $d = 6\,mm$, Länge $L = 12\,cm$). Beide Teile sind aus Glas und haben insgesamt eine Masse von $m_0 = 12\,g$. Die Hohlkugel wird mit Bleikügelchen gefüllt und schwimmt deshalb aufrecht in der zu untersuchenden Flüssigkeit.



(5) **a**. Wie viel Blei muss eingefüllt werden, damit das untere Ende der Skala einer Dichteanzeige von 1,025 g/cm^3 entspricht? (Nur der mit Blei gefüllte Hohlkörper befindet unterhalb der Flüssigkeitsoberfläche.)

(5) **b**. Welche Dichte wird angezeigt, wenn die Säule vollständig mit der Länge *L* in die Flüssigkeit eintaucht?

(5) **c**. Welche Eintauchtiefe *x* entspricht der Dichte $\rho_x = 1{,}00\,g\,cm^{-3}$?

2. Die Reifen eines PKW sollen nach Herstellerangaben mit einem Reifendruck von 1,9 bar betrieben werden. Die PKW Masse beträgt $m_{PKW} = 1250\,kg$.

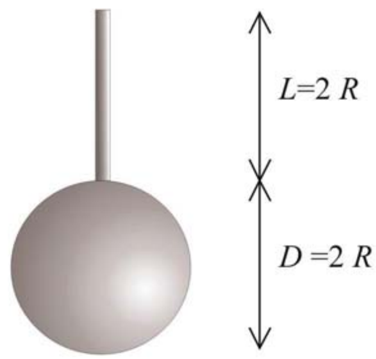
(2) **a**. Handelt es sich beim Reifendruck um eine Absolutdruck- oder um eine Überdruckangabe?

(5) **b.** Wie groß ist die Reifenaufstandsfläche eines einzelnen Reifens?

(5) **c**. Das Fahrzeug soll mit 600 kg beladen werden. Was muss gemacht werden, um mit gleicher Aufstandsfläche wie unbeladen fahren zu können?

(2) **d**. Ändert sich die Aufstandfläche, wenn das Fahrzeug mit Breitreifen (z. B. 30% größerer Breite) ausstattet aber diese dann mit ebenfalls 1,9 bar Druck füllt?

3. Betrachten Sie ein Pendel, dass aus einer Kugel der Masse m_K mit Radius $R = 8{,}0\,cm$ und einer Pendelstange der Masse $m_S = \frac{1}{20} m_K$ und der Länge $L = 2R$ besteht und am oberen Ende der Stange drehbar aufgehängt wird.



(10) **a**. Wie groß ist das Trägheitsmoment?

(10) **b**. Wie groß ist die Eigen(kreis)frequenz ω_0 und die Schwingungsdauer T_0 für eine ungedämpfte Schwingung?

(10) **c.** Wie müsste eine dünne Stange der Länge $L = 2R$ aufgehängt sein, um gleiche Werte für ω_0 und T_0 zu erhalten? (Gesucht wird der Abstand *d* zwischen Schwerpunkt und Drehachse)

4. Eine Masse $m = 1\,kg$ wird an eine Schraubenfeder gehängt. Dabei verlängert sich die Feder um 10 cm. Anschließend wird die Feder (zusammen mit der Masse) aus der Ruhelage ausgelenkt und dann bei $t = 0\,s$ losgelassen. Die Beobachtung ergibt, dass die Amplitude mit der Zeit abnimmt. Nach 10 Perioden beträgt sie nur noch 1/10 der Ausgangsamplitude.

(5) **a.** Bestimmen Sie die Federkonstante *D*.

(10) **b.** Wie groß ist die Eigen(kreis)frequenz ω_0 und die Schwingungsdauer T_0 der <u>ungedämpften</u> Schwingung?

(10) **c.** Berechnen Sie die Abklingkonstante β, die Eigen(kreis)frequenz ω_e und die Schwingungsdauer T_e der <u>gedämpften</u> Schwingung?

Verwenden Sie für die Erdbeschleunigung den Wert g = 9,81 m s^{-2}

Lösungen:

1a. Es muss gelten: Gewichtskraft = Auftriebskraft

$$m_{ges}\, g = (m_0 + m_{Pb})\, g = V_{Kugel}\, \rho_{\max}\, g$$

$$m_{Pb} = V_{Kugel}\, \rho_{\max} - m_0$$

Masse des Bleigewichtes: $$m_{Pb} = \frac{4}{3}\pi R^3\, \rho_{\max} - m_0 = 55{,}086\ g$$

1b. Volumen der Kugel: $$V_K = \frac{4}{3}\pi R^3 = 65{,}450\ cm^3$$

Volumen des gesamten Zylinders: $$V_Z = \pi r^2 L = 3{,}393\ cm^3$$

Gesamtvolumen: $$V_{ges} = V_K + V_Z = 68{,}843\ cm^3$$

Auftriebsbedingung: Gewichtskraft = Auftriebskraft

$$(m_{Pb} + m_0)\, g = V_{ges}\, \rho_{\min}\, g$$

$$\rho_{\min} = \frac{m_{Pb} + m_0}{V_{ges}} = \frac{(55{,}086 + 12{,}000)\, g}{68{,}843 cm^3} = 0{,}974 \frac{g}{cm^3}$$

1c. Gewichtskraft ungeändert: $$F_g = (m_{Pb} + m_0)\, g$$

Auftriebskraft: $$F_A = \rho_{1,00}\, (V_K + V_Z(x))\, g = \rho_{1,00}\, (V_K + \pi r^2 x)\, g$$

Es folgt: $$(m_{Pb} + m_0) = \rho_{1,00}\, (V_K + \pi r^2 x)$$

$$x = \frac{1}{\pi r^2}\left(\frac{m_{Pb} + m_0}{\rho_{1,00}} - V_K\right)$$

$$x = \frac{1}{0{,}283\ cm^2}\left(\frac{(55{,}086 + 12{,}000) g}{1{,}00\ g\ cm^{-3}} - 65{,}450\, cm^3\right)$$

$$x = 5{,}78\, cm$$

2a. Reifendruck wird als Überdruck Δp (Druckangabe bezogen auf Standardatmosphäre) angegeben. Der Absolutdruck p_{abs} (Druckangabe bezogen auf Vakuumdruck) ist:

$$p_{abs} = \Delta p + p_0 = 2{,}9 bar = 2900\ hPa$$

2b. Der Differenzdruck zwischen zwei Systemen ist definiert als Kraft pro Fläche.

Definition: $$\Delta p = \frac{F}{A}$$

Die Kraft pro Reifen beträgt ¼ der Gewichtskraft des gesamten PKW.

$$F_R = \frac{1}{4} F_g = \frac{1}{4} m_{PKW}\ g = 3066\, N$$

Mit: $$\Delta p_0 = 1{,}9\, bar = 1900\ hPa$$

Reifenaufstandsfläche: $$A = \frac{F_R}{\Delta p_0} = \frac{3066\, N}{1{,}9\, 10^5\ N\ m^2} = 1{,}614\, 10^{-2}\ m^2 = 161{,}4\, cm^2$$

2c. Mit Zuladung würde sich bei gleichem Reifendruck die Reifenaufstandsfläche vergrößern. Die Zuladung erhöht die Gewichtskraft pro Reifen um:

$$F_{ZL} = \frac{1}{4} m_{ZL}\ g = 1471{,}5\ N$$

Die Reifenaufstandsfläche bleibt gleich, wenn gilt:

$$\Delta p_1 = \frac{F_R + F_{ZL}}{A} = \frac{(3066 + 1471{,}5)}{0{,}01614\, m^2} = 2811\, hPa$$

Druckerhöhung $$\Delta p_1 = 1{,}48 \cdot \Delta p_0$$

(Die Reifenhersteller empfehlen als Faustregel den Reifendruck bei voller Zuladung um 0,3 bar bis 0,5 bar zu erhöhen)

2d. Da die Reifenaufstandsfläche nur von der Gewichtskraft und dem Reifendruck abhängt, ändert sich diese nicht mit der Reifenbreite.

3a. Massenträgheitsmoment der Kugel nach Steinerschem Satz.:

$$J_K = m\,d^2 + J_S$$

$$J_K = m_K\,(3R)^2 + \frac{2}{5} m_K\, R^2$$

$$J_K = m_K R^2 \left(9 + \frac{2}{5}\right) = \frac{47}{5} m_K\, R^2$$

Massenträgheitsmoment der Stange: $J_S = \frac{1}{3} m_S\, L^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{20} m_K\right)\cdot\left(4\,R^2\right)$

$$J_S = \frac{4}{60} m_K\, R^2$$

Gesamtträgheitsmoment: $J_{ges} = J_K + J_S$

$$J_{ges} = \left(\frac{47}{5} + \frac{4}{60}\right) m_K\, R^2 = \frac{568}{60} m_K\, R^2$$

3b. Eigenkreisfrequenz: $\omega_0 = \sqrt{\frac{m\,g\,d}{J}} = \sqrt{\frac{60\cdot(m_K + m_S)\,g\,d}{568\, m_K\, R^2}}$

$$m_K + m_S = \left(1 + \frac{1}{20}\right) m_K = \frac{21}{20} m_K$$

Schwerpunktabstand: $d = \frac{\sum m_i\, r_i}{\sum m_i} = \frac{m_S\, R + m_K\, 3R}{m_S + m_K} = \frac{61\cdot 20}{20\cdot 21} R = \frac{61}{21} R$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{60\cdot 21\, m_K\, g\cdot 61 R}{568\cdot 20\cdot 21\, m_K R^2}} = \sqrt{\frac{3\;g\;61}{568\;R}}$$

Lösung Eigenkreisfrequenz: $\omega_0 = \sqrt{\frac{3\cdot 9{,}81\cdot 61\; m\,s^{-2}}{568\cdot 0{,}080\,m}} = 6{,}286\;s^{-1}$

Lösung Schwingungsdauer: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 1{,}0\,s$

3c. Der Stab muss um einen Drehpunkt schwingen, der zwischen Schwerpunkt und oberem Ende der Stange liegt. Sei d der Abstand zwischen Drehachse und Schwerpunkt.

Eigenkreisfrequenz: $\omega_0 = \sqrt{\frac{m\,g\,d}{J_{ges}}}$

Massenträgheitsmoment: $J_{ges} = m\,d^2 + J_S$

$$J_{ges} = m\,d^2 + \frac{1}{12} m\,L^2$$

Es folgt: $\omega_0^2 = \frac{m\,g\,d}{m\left(d^2 + \frac{1}{12}L^2\right)}$

$$d^2 + \frac{1}{12}L^2 = \frac{g\,d}{\omega_0^2}$$

Umformung: $d^2 - \frac{g}{\omega_0^2} d = -\frac{1}{12}L^2$

$$\left(d - \frac{g}{2\,\omega_0^2}\right)^2 = \frac{g^2}{4\,\omega_0^4} - \frac{1}{12}L^2$$

Lösung:

$$d = \pm\sqrt{\frac{g^2}{4\omega_0^4} - \frac{1}{12}L^2} + \frac{g}{2\omega_0^2}$$

$$d = \left(\pm\sqrt{\frac{9{,}81^2}{4\cdot 6{,}286^4} - \frac{1}{12}0{,}16^2} + \frac{9{,}81}{2\cdot 6{,}286^2}\right)m$$

$$d = \left(\pm\sqrt{0{,}01541 - 0{,}00213} + 0{,}12413\right)m$$

$$d = \left(\pm 0{,}11523 + 0{,}12413\right)m$$

$$d_1 = 0{,}23936\,m$$

$$d_2 = 0{,}0089\,m$$

Die Lösung d_1 liegt nicht zwischen Schwerpunkt der Stange und ihrem oberen Ende. Die gesuchte Lösung ist also $d_2 = 0{,}89\,cm$.

4a. Federkonstante: $D = \frac{\Delta F}{\Delta s} = \frac{m\,g}{\Delta s} = \frac{9{,}81\,N}{0{,}1\,m} = 98{,}1\frac{N}{m}$

4b. Eigenkreisfrequenz: $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{98{,}1\,kg}{1\,kg\,s^2}} = 9{,}90\,s^{-1}$

Schwingungsdauer $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0{,}6344\,s$

4c. Amplitudenfunktion allgemein: $x(t) = x_0 \cdot e^{-\beta t}\left(\frac{\beta}{\omega_e}\sin(\omega_e\,t) + \cos(\omega_e\,t)\right)$

für $t = 0$ gilt: $x(t=0) = x_0 \cdot 1\left(\frac{\beta}{\omega_e}\sin(\omega_e\,0) + \cos(\omega_e\,0)\right) = x_0$

für $t = 10T_e$ gilt $x(t=10T_e) = x_0 \cdot e^{-\beta 10 T_e}\left(\frac{\beta}{\omega_e}\sin(\omega_e\,10T_e) + \cos(\omega_e\,10T_e)\right)$

mit $T_e = 2\pi\frac{1}{\omega_e}$ folgt: $x(t=10T_e) = x_0 \cdot e^{-\beta 10 T_e}\left(\frac{\beta}{\omega_e}\sin(10\cdot 2\pi) + \cos(\omega_e \cdot 2\pi)\right)$

$$x(t=10T_e) = x_0 \cdot e^{-\beta 10 T_e}$$

Es folgt: $\frac{x(t=0)}{x(t=10T_e)} = \frac{1}{10} = e^{-\beta 10 T_e}$

$$\ln\frac{1}{10} = -\beta\,10\,T_e = -\ln 10$$

Lösung für β: $\beta = \frac{\ln 10}{10\,T_e}$

Näherungslösung mit $T_e \approx T_0$: $\beta = \frac{\ln 10}{10\,T_0} = \frac{2{,}30258}{6{,}344\,s} = 0{,}3629\,s^{-1}$

Man kann die Abklingkonstante auch exakt bestimmen:

Es gilt: $\omega_e^2 = \omega_0^2 - \beta^2$

$$\frac{4\pi^2}{T_e^2} = \frac{4\pi^2}{T_0^2} - \frac{(\ln 10)^2}{10^2\,T_e^2}$$

$$\frac{4\pi^2}{T_e^2} = \frac{4\pi^2}{T_0^2} - \frac{(\ln 10)^2}{10^2\,T_e^2}$$

$$\frac{4\pi^2}{T_e^2}\left(1+\frac{(\ln 10)^2}{4\pi^2 10^2}\right)=\frac{4\pi^2}{T_0^2}$$

$$T_e^2=\left(1+\frac{(\ln 10)^2}{4\pi^2 10^2}\right)\cdot T_0^2=1{,}00134\cdot T_0^2$$

$$T_e=1{,}00067\cdot T_0$$

$$\beta=\frac{\ln 10}{10\cdot 1{,}00067\,T_0}=\frac{1}{1{,}00067}\beta_{Näherung}=0{,}99932\cdot\beta_{Näherung}$$

Der Unterschied ist aber vernachlässigbar. Für diese Lösung gibt es bis zu 5 Sonderpunkten.

Eigenkreisfrequenz (Näherung): $\omega_e=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}=9{,}893\,s^{-1}$

Schwingungsdauer (Näherung): $T_e=\frac{2\pi}{\omega_e}=0{,}6351\,s$

Exakte Lösung: $T_e=1{,}00067\cdot T_0=0{,}6348\,s$

$$\omega_e=\frac{2\pi}{T_e}=9{,}897\,s^{-1}$$
