1. Eine Schwimmboje bestehe aus einem Schwimmkörper in der Form eines Zylinders (Durchmesser: 2 m und Höhe: 3 m), auf dem ein 15 m hoher Mast (Durchmesser: 0,20 m) befestigt ist. Die Masse der Boje einschließlich Mast und Ballast des Schwimmkörpers betrage 9,8 t.

a. Wie hoch ragt die Mastspitze beim Normalbetrieb im Meerwasser (ρ_M = 1,038 g cm^{-3}) aus dem Wasser?

b. Die Boje werde in eine Flussmündung mit Süßwasser (ρ_S = 1,0 g cm^{-3}) geschleppt. Wie hoch ragt jetzt die Mastspitze aus dem Wasser?

c. Was passiert mit der Boje, wenn die Wasserdichte in der Flussmündung durch Temperatur- oder Strömungsänderungen um 1% sinkt?

Lösungen:

1a. Auftriebsvolumen im Meerwasser: $V_A^M = \frac{A}{\rho_M \cdot g} = \frac{m}{\rho_M} = \frac{9{,}8}{1{,}038} m^3 = 9{,}4412\ m^3$

Volumen des Schwimmkörpers: $V_Z = \pi \cdot R_B^2 \cdot H = 9{,}4248\, m^3$

Auftriebsvolumen des Mastes: $V_M = V_A^M - V_Z = (9{,}4412 - 9{,}4248)\, m^3 = 0{,}0164\ m^3$

Mastlänge unter Oberfläche: $H_M = \frac{V_M}{\pi \cdot R_M^2} = 0{,}52\, m$

Die Mastspitze ragt 15,00 m – 0,52 m = 14,48 m aus dem Wasser.

1b. Auftriebsvolumen im Süßwasser: $V_A^S = \frac{A}{\rho_S \cdot g} = \frac{m}{\rho_S} = 9{,}8\ m^3$

Auftriebsvolumen des Mastes: $V_S = V_A^S - V_Z = (9{,}8000 - 9{,}4248)\, m^3 = 0{,}3752\ m^3$

Mastlänge unter Oberfläche: $H_S = \frac{V_S}{\pi \cdot R_M^2} = 11{,}94\ m$

Die Mastspitze ragt 15,00 m – 11,94 m = 3,06 m aus dem Wasser.

1.c Auftriebsvolumen im Süßwasser: $V_A^S = \frac{A}{\rho_S \cdot g} = \frac{m}{\rho_S} = 9{,}8989\ m^3$

Auftriebsvolumen des Mastes: $V_S = V_A^S - V_Z = (9{,}8989 - 9{,}4248)\, m^3 = 0{,}4741\, m^3$

Mastlänge unter Oberfläche: $H_S = \frac{V_S}{\pi \cdot R_M^2} = 15{,}09\ m$

Der Mast sinkt unter die Wasseroberfläche, die Boje sinkt.

2. Die vier Reifen eines PKW mit der Masse von 1200 kg seien jeweils mit einem Überdruck von 2 bar gefüllt (1 bar = 1000 hPa).

a. Wie groß ist die Kontaktfläche eines einzelnen Reifens mit der Fahrbahn?

b. Wie ändert sich die Kontaktfläche, wenn der Besitzer sein Fahrzeug mit Breitreifen (z. B. 30% größerer Breite) ausstattet und diese dann mit ebenfalls 2 bar Druck befüllt?

Lösungen:

2a. Druck im Reifen: $p_{Reifen} = p_{Über} + p_A$

Kontaktfläche pro Rad: $A_R = \frac{m_{PKW} \cdot g}{4 \cdot (p_{Reifen} - p_A)} = 147\ cm^2$

2b. Kontaktfläche ist unabhängig von der Reifenbreite.

3. Bei einem Rennrad kann man Reifen mit bis zu 1 MPa (10 bar) Überdruck verwenden. Nehmen Sie an, dass ein Rennrad eine Masse von 8 kg und der Fahrer eine Masse von 72 kg hat.

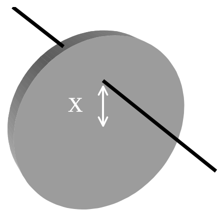
a. Wie groß ist die Reifenaufstandsfläche?

Lösung:

3a. Gesamtfläche: $$A_{ges} = \frac{F_G}{p} = \frac{m\,g}{p} = \frac{80\;kg \cdot 10\;m\,s^{-2}}{10^6\;N\,m^{-2}} = 8\;cm^2$$

Reifenaufstandsfläche: $$A_R = \frac{A_{ges}}{2} = 4\;cm^2$$

4. Gegeben sei eine Scheibe aus Aluminium mit einem Radius von 17,91 cm.



a. Welchen Abstand *x* muss eine Drehachse vom Scheibenmittelpunkt haben, damit das Pendel unter Wirkung der Gewichtskraft mit einer Schwingungsdauer von 1,0 s schwingt?

b. Welche Länge müsste ein homogener dünner Stab haben, dessen Drehpunkt am Stabende liegt und der mit gleicher Schwingungsdauer von 1,0 *s* schwingt?

Lösungen:

4a. Trägheitsmoment der Scheibe bezüglich einer Drehung um Drehpunkt *x*:
$$J = J_S + m\,x^2 = \frac{1}{2} m\,R^2 + m\,x^2$$

Eigen(kreis)frequenz eines physikalischen Pendels:
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m\,g\,x}{J}} = \sqrt{\frac{m\,g\,\hat{x}\,R}{J}} = \sqrt{\frac{m\,g\,x}{\frac{1}{2} mR^2 + m\,x^2}}$$

Es folgt: $$\omega_0^2 = \frac{g\,x}{\frac{1}{2} R^2 + x^2}$$

Umstellung: $$\frac{1}{2} R^2 + x^2 = \frac{g}{\omega_0^2} \cdot x$$
$$x^2 - \frac{g}{\omega_0^2} \cdot x = -\frac{1}{2} R^2$$

Lösung der quadratischen Gleichung: $$x_{1/2} = \pm \sqrt{\left(\frac{g}{2\omega_0^2}\right)^2 - \frac{R^2}{2}} + \frac{g}{2\,\omega_0^2}$$
$$x_{1/2} = \pm \sqrt{\left(\frac{g\,T_0^2}{8\,\pi^2}\right)^2 - \frac{R^2}{2}} + \frac{g\,T_0^2}{8\,\pi^2}$$
$$x_{1/2} = \pm \sqrt{\left(\frac{10 \cdot 1^2}{78{,}9568}\right)^2 - \frac{0{,}1791^2}{2}}\,m + \frac{10 \cdot 1^2}{78{,}9556}\,m$$
$$x_{1/2} = \pm \sqrt{0{,}016041 - 0{,}016038}\;m + 0{,}12665\;m = 12{,}67\;cm$$

Lösung für Abstand x: $$x = 12{,}67\,cm$$

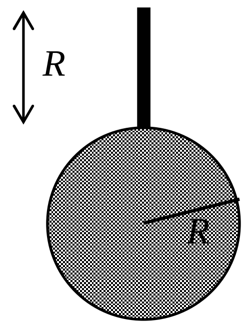
4b. Trägheitsmoment einer dünnen Stange mit Länge *L* (mit homogener Massenverteilung) bezüglich einer Drehung um das Stabende: $$J = \frac{1}{12} m\,L^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m\,L^2$$

Eigen(kreis)frequenz eines physikalischen Pendels:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m\,g\,\frac{L}{2}}{J}} = \sqrt{\frac{m\,g\,L}{2\cdot\frac{1}{3}m\,L^2}} = \sqrt{\frac{3\,g}{2\,L}}$$

Es folgt: $$L = \frac{3\,g}{2\,\omega_0^2} = \frac{3\,g\,T_0^2}{2\cdot 4\cdot\pi^2} = \frac{3\cdot 10\cdot 1^2}{78{,}9568}\,m = 0{,}38\,m = 38\,cm$$

5. Eine Kugel mit Radius *R* hängt an einer Stange der Länge *R*. Die Massen von Stange und Kugel verhalten sich wie 1/10. Eine Messung liefert für die Schwingungsdauer 0,95 *s*. Die Schwingungsamplitude beträgt nach fünf Schwingungsperioden 1,5% der Ausgangsamplitude. (Zur Vereinfachung des Problems vernachlässige man die Dicke der Pendelstange.)



Bestimmen Sie:
a. Den Abstand *d* zwischen Drehpunkt und Schwerpunkt.
b. Die Abklingkonstante β.
c. Das Massenträgheitsmoment.
d. Die Eigen(kreis)frequenz ω_0 und die Schwingungsdauer T_0 der ungedämpftenSchwingung.
e. Den Wert von *R*.

Lösungen

5a. Abstand Drehachse – Schwerpunkt: $$d = \frac{m_s\cdot\frac{R}{2} + m_K\cdot 2R}{m_S + m_K} = \frac{0{,}05+2}{1{,}1}\cdot R = \frac{205}{110}\cdot R = 1{,}864\cdot R$$

5b. Gedämpfte Schwingung: $$\varphi(t = 5T_e) = \varphi_0\cdot e^{-\beta 5T_e}$$

Abklingkonstante: $$\beta = -\frac{\ln 0{,}015}{5T_e} = \frac{4{,}1997}{4{,}75} = 0{,}88415\,s^{-1}$$

5c. Trägheitsmoment von Kugel und Stange:

$$J = \frac{1}{3}m_s R^2 + \frac{2}{5}m_K R^2 + m_K(2R)^2$$

$$J = \frac{1}{30}m_K R^2 + \frac{2}{5}m_K R^2 + 4\,m_K R^2 = \frac{133}{30}m_K\,R^2 = 4{,}43\,m_K R^2$$

5d. Eigenfrequenz der ungedämpften Schwingung:

$$\omega_e = \frac{2\pi}{T_e} = 6{,}61388\,s^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_e^2 + \beta^2} = \sqrt{6{,}61388^2 + 0{,}88415^2}\;s^{-1} = 6{,}67272\,s^{-1}$$

Schwingungsdauer der ungedämpften Schwingung:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0{,}94162\,s$$

5e. Physikalisches Pendel: $$\omega_0 = \sqrt{\frac{m_{ges}\,g\,d}{J}} = \sqrt{\frac{11\cdot 30\cdot 205\cdot m_K\cdot g\cdot R}{10\cdot 133\cdot 110\cdot m_K R^2}} = \sqrt{\frac{123}{133}\cdot\frac{g}{2R}}$$

Lösung für R: $$R = \frac{123}{133}\frac{g}{2\,\omega_0^2} = 0{,}10\,m = 10\,cm$$

6. Eine Masse von 1 *kg* hängt an einer Schraubenfeder. Eine Kraft von 4 *N* verlängert die Feder um 10 *cm*. Das Feder-Masse-System soll aus der Gleichgewichtslage um $x_0 = 20\;cm$ ausgelenkt und dann losgelassen werden. Die Schwingungen sollen zunächst als frei und ungedämpft betrachtet werden.

a. Wie groß sind: Federkonstante(1), Schwingungsdauer(2), Eigenkreisfrequenz(3), Geschwindigkeit der Masse beim Nulldurchgang(4), Schwingungsenergie des Systems (5)?
b. Die Beobachtung zeigt, dass die Schwingungen gedämpft sind. Eine genau Messung der Schwingungsdauer ergibt einen Wert von 1,00 s. Wie groß ist die Abklingkonstante β?

Lösungen:

6a. Federkonstante(1): $D = \frac{F}{s} = \frac{4\,N}{0{,}1\,m} = 40\,\frac{N}{m}$

Schwingungsdauer(2): $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 0{,}9935\,s$

Eigenkreisfrequenz(3): $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = 6{,}325\,s^{-1}$

Max. Geschwindigkeit(4): $v_{\max} = x_0 \cdot \omega_0 = 1{,}265\,\frac{m}{s}$

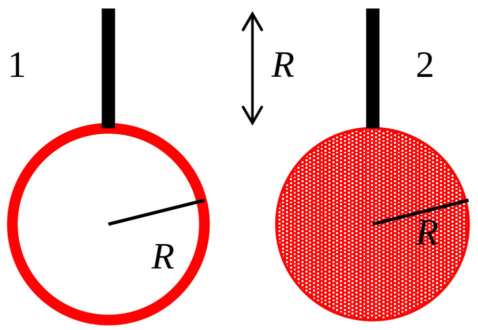
Schwingungsenergie(5): $E_{ges} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{x_0^2\,D}{2} = 0{,}8\ J$

6b. Eigenfrequenz der gedämpften Schwingung:

$$\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Abklingkonstante: $\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_e^2} = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{4\pi^2}{T_e^2}} = 0{,}72\,s^{-1}$

7. Es sollen zwei Pendel verglichen werden: Pendel 1 besteht aus einem (dünnem) Ring der Masse m_1 mit Radius $R = 1\,m$, der an einer Stange der Masse $m_S = 0{,}5\,m_1$ und der Länge R hängt. Pendel 2 besitzt statt des Ringes eine homogene Scheibe gleicher Masse. Drehpunkt A ist jeweils das obere Ende der Stange. (Zur Vereinfachung des Problems berücksichtige man nicht die Dicken der Pendelstangen und des Ringes).



Bestimmen Sie für beide Pendel:
a. Den Schwerpunkt S und den Abstand d zwischen Drehpunkt A und Schwerpunkt S.
b. Die Eigen(kreis)frequenz ω_0 und die Schwingungsdauer T_0 für eine ungedämpfte Schwingung.
c. Die Länge l_R ,die ein mathematisches Pendel mit der gleichen Schwingungsdauer hätte.

d. Das Pendel 2 soll jetzt um den Drehpunkt A' schwingen. A' liegt auf der Linie, die durch A und S verläuft und der Abstand zwischen den Punkten A und A' soll gleich der Länge l_R sein. Bestimmen Sie die Schwingungsdauer bezüglich des neuen Drehpunkts.

Lösungen:

7a. Schwerpunkt der Stange und Schwerpunkt von Ring/Scheibe haben einen Abstand von $\frac{3}{2}R$

Bezeichnet man den Abstand zwischen Pendelschwerpunkt und dem der Stange mit l_1 und den Abstand zwischen Pendelschwerpunkt und dem von Ring/Scheibe mit l_2,

gilt: $l_1 + l_2 = \frac{3}{2}R$

und: $F_1 = m_S g l_1 = m_1 g l_2 = F_2$

Abstand Drehachse-Schwerpunkt: $d = \frac{1}{2}R + l_1 = \frac{1}{2}R + R = \frac{3}{2}R = 1{,}5\,m$

7b. Für ein physikalisches Pendels gilt:

Eigen(kreis)frequenz: $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{J}}$

Pendelmasse (Ring u. Scheibe): $m = m_S + m_1 = \frac{3}{2}m_1$

Pendel 1 (mit Ring): $J_1 = \frac{1}{3}m_S R^2 + m_1(2R)^2 + m_1 R^2$

$$J_1 = \left(\frac{1}{6} + 4 + 1\right)m_1 R^2 = \frac{31}{6}m_1 R^2$$

Eigen(kreis)frequenz (Pendel 1): $\omega_0^1 = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}m_1 \cdot g \cdot \frac{3}{2}R}{\frac{31}{6}m_1 R^2}} = \sqrt{\frac{27}{62}\frac{g}{R}} = 2{,}067\,s^{-1}$

Schwingungsdauer (Pendel 1): $T_0^1 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 3{,}040\ s$

Pendel 2 (mit Scheibe): $J_2 = \frac{1}{3}m_S R^2 + m_1(2R)^2 + \frac{1}{2}m_1 R^2$

$$J_2 = \left(\frac{1}{6} + 4 + \frac{1}{2}\right)m_1 R^2 = \frac{28}{6}m_1 R^2$$

Eigen(kreis)frequenz (Pendel 2): $\omega_0^2 = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}m_1 \cdot g \cdot \frac{3}{2}R}{\frac{28}{6}m_1 R^2}} = \sqrt{\frac{27}{56}\frac{g}{R}} = 2{,}17482 s^{-1} = 2{,}175\,s^{-1}$

Schwingungsdauer (Pendel 2): $T_0^2 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2{,}889\ s$

7c. Mathematisches Pendel mit gleicher Schwingungsdauer:

Eigen(kreis)frequenz: $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l_R}}$

Reduzierte Pendellänge (Pendel 1): $l_R^1 = \frac{g}{\omega_0^2} = 2{,}296\ m$

Reduzierte Pendellänge (Pendel 2): $l_R^2 = \frac{g}{\omega_0^2} = 2{,}07407\ m = 2{,}074\ m$

7d. Schwingung des Pendels 2 um A':

Abstand Drehachse-Schwerpunkt: $d = (2{,}074\ m - 1{,}5\ m) = 0{,}574\,m = 0{,}57407\ R$

Pendel 2 (mit Scheibe) um A':

$$J_2' = \frac{1}{12}m_S R^2 + m_S(1{,}574\ R)^2 + m_1(0{,}074\ R)^2 + \frac{1}{2}m_1 R^2 =$$

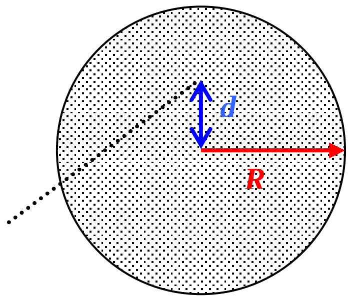
$$= \frac{1}{24}m_1 R^2 + \frac{1}{2}m_1(1{,}574\ R)^2 + m_1(0{,}074\ R)^2 + \frac{1}{2}m_1 R^2$$

$$= (0{,}04167 + 1{,}23885 + 0{,}00549 + 0{,}5)m_1 R^2 = 1{,}7860\ m_1 R^2$$

Eigenfrequenz (Pendel 2 bzgl. A'): $\omega_0' = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}m_1 \cdot g \cdot 0{,}57407\ R}{1{,}7860\ m_1 R^2}} = \sqrt{0{,}48214\frac{g}{R}} = 2{,}175\,s^{-1}$

Schwingungsdauer (Pendel 2 bzgl. A': $T_0' = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2{,}889\ s$

8. Eine Aluminiumscheibe (Dicke: 1 mm, ρ_{Al} = 2,7 g cm^{-3}) drehe sich um eine Achse, die einen Abstand von d = 5 cm vom Scheibenmittelpunkt besitzt. Das Drehpendel werde um 20° ausgelenkt. Die Schwingungsdauer betrage 1,0 s. Die Amplitude nimmt innerhalb von zehn Schwingungen auf 2% der Ursprungsamplitude ab.



a. Berechnen Sie die Eigen(kreis)frequenz ω_e der gedämpften Schwingung, die Abklingkonstante β und die Eigen(kreis)frequenz ω_0 und die Schwingungsdauer T_0 der ungedämpften Schwingung.
b. Wie groß ist der Radius R der Scheibe?
c. Wie groß ist die anfängliche Energie E_{ges} des Pendels?
d. Welchen Energieanteil verliert das Pendel pro Schwingung?
e. Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit des Pendels beim ersten Nulldurchgang?
f. Welche Schwingungsdauer würde sich ergeben, wenn das Pendel als mathematisches Pendel betrachtet würde?

Lösungen:

8a. Eigen(kreis)frequenz: $\omega_e = \frac{2\pi}{T_e} = 6{,}2832\ s^{-1}$

Abklingkonstante: $\beta = -\frac{\ln \frac{A(t = 10T_e)}{A_0}}{10 \cdot T_e} = 0{,}3912\ s^{-1}$

Eigen(kreis)frequenz: $\omega_0 = \sqrt{\omega_e^2 + \beta^2} = 6{,}2953\ s^{-1}$

8b. Scheibenradius: $R = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{g \cdot d}{\omega_0^2} - d^2\right)} = 14{,}05\ cm$

8c. Masse der Scheibe: $m_S = \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot d = 0{,}1676\ kg$

Anfangshöhe: $h = d - d \cdot \cos\varphi = 0{,}302\ cm$

Anfangsenergie $E_{ges} = m \cdot g \cdot h = 0{,}00496\ J$

8d. Energieverlust: $\frac{E(T_e)}{E_0} = \exp(-2 \cdot \beta \cdot T_e) = 0{,}4573$

8e. Winkelgeschwindigkeit: $\dot{\varphi}\left(t = \frac{T}{4}\right) = \varphi_0 \cdot \omega_e \exp\left(-\beta \cdot \frac{T}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1{,}097\ s^{-1}$

8f. Mathm. Pendel: $T_m = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_0^m} = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{\frac{g}{d}}} = 0{,}449\ s$