Fachhochschule Hannover　　vorgezogene Wiederholungsklausur　　21.03.2005
Fachbereich Maschinenbau　　Zeit: 90 min
Fach: Physik II im WS0405　　Hilfsmittel: Formelsammlung zur Vorlesung

1. Bei einer hydrostatischen Wägung vergleicht man (ähnlich wie Archimedes einst bei der Prüfung des Goldgehaltes der Königskrone) die Anzeige einer Waage in Luft mit einer Anzeige, bei der der Körper vollständig in eine Flüssigkeit eintaucht.
a. Die Anzeige in Luft betrage 2,27 kg, die in Wasser 1,77 kg. Welches Volumen hat des Prüfkörpers?
b. Welche Dichte hat der Körper? (Zusatzfrage: Aus welchem Material könnte er sein?)
c. Welche Anzeigen ergeben sich bei Vergleichwägungen in Benzin und Wasser?

2. Der Franzose Founier möchte mit einem Heliumballon bis in eine Höhe von ca. 40 000 m aufsteigen und von dort mit dem Fallschirm abspringen. (Das Bild zeigt den Ballon kurz vor einem Fehlversuch im Jahr 2003, bei dem die Ballonhülle aus 16 µm Polyethylen riss). Das (pralle) Ballonvolumen V_B beträgt 510 000 m^3. Rüstmasse und Nutzlast betragen jeweils 1000 kg.

a. Warum füllt man beim Start, wie auf dem Bild erkennbar, nur einen Teil des Ballons mit dem Auftriebsgas? .
b. Welches Mindestvolumen Helium V_{He}^0 ist erforderlich, damit der Ballon bei einem Luftdruck von $p_1 = 960\,hPa$ und einer Temperatur von $T_1 = 10°C$ am Startort schweben kann?
c. Der Ballon wird mit dem Doppelten des Mindestvolumes gefüllt. Welche Kraft muss den Ballon bis zum Start am Boden halten? Welche Beschleunigung hat er nach dem Start?

d. Beim Aufstieg des Ballons sinkt der äußere Luftdruck. Das Gas im Ballon dehnt sich aus und füllt in der „Prallhöhe“ h_P das gesamte Ballonvolumen V_B. Berechnen Sie h_P unter der vereinfachten Annahme, dass die barometrische Höhenformel gilt und Luftdruck und Luftdichte proportional sind.
e. Der Ballon soll offen sein, d. h. beim Steigen oberhalb von h_p kann überschüssiges Helium entweichen. Welche Maximalhöhe h^{max} kann der Ballon unter den angegeben Modellbedingungen erreichen?

3. Ein Stab der Länge $L = 1\ m$ und der Masse $m = 1kg$ wird um einen Punkt, der 25 cm vom Rand und 25 cm vom Mittelpunkt entfernt ist, drehbar aufgehängt.
a. Wie groß ist die Schwingungsdauer der ungedämpften Schwingung.
b. Wie müsste eine als punktförmig angenommene Masse $m = 0{,}1\ kg$ aufgehängt werden, um die selbe Schwingungsdauer zu haben?
c. Wie ändert sich die Schwingungsdauer bei einem Stab der Masse $m = 2\,kg$, der in gleicher Weise wie in **3a.** beschrieben aufgehängt wird.
d. Das Pendel aus Aufgabe **3a.** soll um einen Winkel von 20° ausgelenkt werden und anschließend frei schwingen. Die Beobachtung ergibt, dass die Winkelamplitude nach 5 Schwingungen nur noch 2° beträgt. Wie groß ist die Abklingkonstante?
e. Welche Energie hat das Pendel in Aufgabe **3d.** bei der Auslenkung von 20°?
f. Wie groß ist das Verhältnis der Energien zweier aufeinanderfolgender Schwingungen (also z. B. die der Schwingung (n+1) und der Schwingung n)?

Dichten: $\rho_0^{Luft} = 1{,}293\ kg\ m^{-3}$ $\rho_0^{He} = 0{,}1785\ kg\ m^{-3}$ bei Standardbedingungen von $p_0 = 1013\,hPa$ und $T_0 = 0°C$. $\rho_{Waseer} = 1{,}0\ g\ cm^{-3}$, $\rho_{Benzin} = 0{,}78\ g\ cm^{-3}$.

Lösungen:

1a. Die Waage misst die Differenz zwischen Gewichtskraft F_g und Auftrieb F_A:

$$F_W = F_g - F_A = m_K\, g - \rho\, V\, g$$

Anzeige *M* entspricht der Masse: $M = \frac{1}{g} \cdot F_W$

$$M = \frac{1}{g}\left(F_g - A\right) = m_K - \rho\, V = V\left(\rho_K - \rho\right)$$

Anzeige der Waage in Luft: $M_L = m_K - \rho_L\, V = V \cdot \left(\rho_K - \rho_L\right)$ (1)

Anzeige der Waage in Wasser: $M_W = m_K - \rho_W\, V = V \cdot \left(\rho_K - \rho_W\right)$ (2)

Einsetzen von ρ_K aus (1) in (2): $M_W = V \cdot \left(\left(\frac{M_L}{V} + \rho_L\right) - \rho_W\right)$

$$M_W = M_L - V\left(\rho_W - \rho_L\right)$$

$$V = \frac{M_L - M_W}{\rho_W - \rho_L} \approx \frac{M_L - M_W}{\rho_W}$$

$$V \approx \frac{M_L - M_W}{\rho_W} = \frac{\left(2{,}27 - 1{,}77\right) kg}{1{,}0\, kg\, dm^3} = 0{,}5\, dm^3$$

1b. Dichte: $\rho_K = \frac{M_L}{V} + \rho_L \approx \frac{M_L}{V} = \frac{2{,}27\, kg}{0{,}5\, dm^3} = 4{,}54 \frac{g}{cm^3}$

Es handelt sich um Titan.

1c. Anzeige der Waage in Wasser: $M_W = m - \rho_W\, V = V \cdot \left(\rho_K - \rho_W\right) = 1{,}77\, kg$

Anzeige der Waage in Benzin: $M_B = m - \rho_B\, V = V \cdot \left(\rho_K - \rho_L\right) = 1{,}88\ kg$

2. Benennung der physikalischen Größen:

Luftdichte bei Standardbedingungen: ρ_0^{Luft}

Heliumdichte bei Standardbedingungen: ρ_0^{He}

Luftdichte am Startort: ρ_1^{Luft}

Heliumdichte am Startort: ρ_1^{He}

He-Volumen für Schwebebedingung: V_0^{He}

He-Volumen beim Start: $V_1^{He} = 2 \cdot V_0^{He}$

2a. Beim Steigen wird die Luftdichte geringer. Bei konstantem Auftriebsvolumen würde auch der Auftrieb geringer werden. Da der Druck im Innerer des Ballons gleich dem Außendruck ist, nimmt die Dichte des Gases im gleichen Verhältnis ab, wie die Dichte der Luft. Die <u>Auftriebskraft</u> bleibt also solange <u>konstant</u>, bis das gesamte Ballonvolumen mit Gas gefüllt ist.

2b. Schwebebedingung: $F_A = V_0^{He}\, \rho_1^{Luft}\, g = \left(m_R + m_N + V_0^{He}\, \rho_1^{He}\right) g = F_G$

wobei ρ_1^{Luft} und ρ_1^{He} die Dichten von Luft und Helium am Startort bezeichnen.

Allgemeine Gasgleichung: $\frac{p_0}{\rho_0\, T_0} = \frac{p_1}{\rho_1\, T_1}$

Luftdichte am Startort: $\rho_1^{Luft} = \frac{p_1\,T_0}{T_1\,p_0}\rho_0^{Luft} = \frac{960\cdot 273}{283\cdot 1013}1{,}293\frac{kg}{m^3} = 1{,}182\frac{kg}{m^3}$

Heliumdichte am Startort: $\rho_1^{He} = \frac{p_1\,T_0}{T_1\,p_0}\rho_0^{He} = \frac{960\cdot 273}{283\cdot 1013}0{,}1785\frac{kg}{m^3} = 0{,}1632\frac{kg}{m^3}$

Kleinstes Heliumvolumen: $V_0^{He} = \frac{m_R + m_N}{\rho_1^{Luft} - \rho_1^{He}} = \frac{2000\ kg\cdot m^3}{(1{,}182 - 0{,}1632)kg} = 1963\,m^3$

2c. Auf den Ballon wirken die Gewichtskraft F_g nach unten und die entgegengesetzt gerichtete Auftriebskraft F_a nach oben. Beim Start wird das doppelte des zum Schweben des Ballons benötigten Heliums eingefüllt: $V_1^{He} = 2\cdot V_0^{He} = 3926\,m^3$

Gewichtskraft: $F_g = m_{ges}\cdot g = \left(m_R + m_N + \rho_1^{He}V_1^{He}\right)\cdot g$

Masse des Heliums: $m^{He} = \rho_1^{He}\cdot V_1^{He} = 0{,}1632\,kg\,m^{-3}\cdot 3926\,m^3 = 641\,kg$

Gesamtmasse: $m_{ges} = 2\cdot 1000\,kg + 641\,kg = 2641\,kg$

$$F_g = 2641\,kg\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} = 25{,}91\,kN$$

Auftriebskraft: $F_A = \rho_1^{Luft}\cdot V_1^{He}\cdot g = \rho_1^{Luft}\cdot\left(2\cdot V_0^{He}\right)\cdot g$

$$F_A = 1{,}182\frac{kg}{m^3}\cdot 2\cdot 1963\,m^3\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} = 45{,}52\,kN$$

Resultierende Kraft nach oben: $F_{\mathrm{Res}} = F_A - F_g = (45{,}52 - 25{,}91)\,kN = 19{,}61\,kN$

Beschleunigung: $a = \frac{F_{\mathrm{Res}}}{m_{ges}} = \frac{19{,}61\cdot 10^3\,kg\,m}{2641\,kg\,s^2} = 7{,}43\frac{m}{s^2}$

Füllt man den Ballon mit der doppelten Menge Helium, die für das Schweben benötigt wird, so wird er mit fast +g nach oben beschleunigt.

2d. Balloninnendruck ist immer gleich dem äußeren Luftdruck.

Es gilt für alle Höhen *h*: $p^{He}(h) = p^{Luft}(h)$

und auch am Startort gilt: $p_1^{He} = p_1^{Luft}$

Das Verhältnis von Druck und Dichte im Ballon ist konstant (folgt aus der allgemeinen Gasgleichung)

$$\frac{p^{He}(h)}{\rho^{He}(h)} = \frac{p_1^{He}}{\rho_1^{He}}$$

Es folgt: $p^{He}(h) = p_1^{He}\frac{\rho^{He}(h)}{\rho_1^{He}}\cdot = p_1^{Luft}\frac{\rho^{He}(h)}{\rho_1^{He}}$

Am Startort gilt: $\rho_1^{He} = \frac{m_1^{He}}{V_0^{He}} = \frac{\rho_1^{He}V_1^{He}}{V_1^{He}}$

und da die Masse des Heliums beim Aufstieg des Ballons bis auf die Höhe h_p konstant bleibt,

gilt in der Höhe h_p ebenfalls: $\rho_{He}(h_p) = \frac{m_1^{He}}{V_B} = \frac{\rho_1^{He}V_1^{He}}{V_B}$

Barometrische Höhenformel: $p^{He}(h_p) = p^{Luft}(h_p) = p_1^{Luft}\cdot\exp\left(-\frac{\rho_0^{Luft}\cdot g}{p_0^{Luft}}\cdot h_p\right)$

Es folgt: $$\frac{V_1^{He}}{V_B} = \exp\left(-\frac{\rho_0^{Luft}\, g}{p_0^{Luft}} \cdot h_p \right)$$

Umformung nach h_P: $$h_p = -\frac{p_0^{Luft}}{\rho_0^{Luft}\, g} \cdot \ln\frac{V_0^{He}}{V_B} = \frac{p_0^{Luft}}{\rho_0^{Luft} \cdot g} \cdot \ln\frac{V_B}{V_1^{He}}$$

$$h_p = \frac{1013\, hPa}{1{,}293\, kg\, m^{-3}\; 9{,}81\, m\, s^{-2}} \ln\frac{510000}{2 \cdot 1963}$$

Prallhöhe: $$h_p = 7986\, m \cdot 4{,}867 = 38{,}87\, km$$

2e. **Offener Ballon:** Die Masse des Füllgases m_1^{He} bleibt oberhalb von h_p nicht mehr konstant. Es ändert sich also auch die Gesamtmasse des Ballons und damit seine Gewichtskraft F_g.

$$F_g(h) = \left(m_R + m_N + m^{He}(h)\right) \cdot g$$

Oberhalb von h_P sinkt mit steigender Höhe der äußere Luftdruck und deshalb wird auch die Auftriebskraft $F_A(h)$ mit steigender Höhe geringer.

Auftriebskraft oberhalb von h_P $$F_A(h) = \rho^{Luft}(h) \cdot V_B \cdot g$$

Die Maximalhöhe $h^{\max}$ ist erreicht, wenn die Auftriebskraft $F_A\left(h^{\max}\right)$ gleich der Gewichtskraft $F_g\left(h^{\max}\right)$ ist.

Auftriebskraft: $$F_A\left(h^{\max}\right) = \rho_1^{Luft} \exp\left(-\frac{\rho_0^{Luft}\, g}{p_0^{Luft}} h^{\max} \right) V_B\, g$$

Gewichtskraft: $$F_g\left(h^{\max}\right) = \left(m_R + m_N + V_B\, \rho_1^{He} \exp\left(-\frac{\rho_0^{Luft}\, g}{p_0^{Luft}} h^{\max} \right) \right) g$$

Bedingung für $h^{\max}$: $$F_A\left(h^{\max}\right) = F_g\left(h^{\max}\right)$$

$$\rho_1^{Luft} \exp\left(-\frac{\rho_0^{Luft}\, g}{p_0^{Luft}} h^{\max} \right) V_B\, g = \left(m_R + m_N + V_B\, \rho_1^{He} \exp\left(-\frac{\rho_0^{Luft}\, g}{p_0^{Luft}} h^{\max} \right) \right) g$$

Es folgt: $$\exp\left(-\frac{\rho_0^{Luft}\, g}{p_0^{Luft}} h^{\max} \right) = \frac{m_R + m_N}{V_B\left(\rho_1^{Luft} - \rho_1^{He}\right)}$$

Lösung: $$h^{\max} = \frac{p_0^{Luft}}{\rho_0^{Luft} \cdot g} \ln\frac{\left(\rho_{Luft}^0 - \rho_{He}^0\right) \cdot V_B}{m_B + m_N}$$

$$h^{\max} = 7986\; m \cdot \ln\frac{(1{,}182 - 0{,}1632) \cdot 510000}{2000}$$

$$h^{\max} = 7986\, m \cdot 5{,}560 = 44{,}4\, km$$

3a. Der schwingende Stab stellt ein physikalisches Pendel dar.

Trägheitsmoment: $$J_{ges} = \frac{1}{12} m\, L^2 + m\, h^2$$

$$J_{ges} = \frac{1}{12} \cdot 1 kg \cdot 1^2\; m^2 + 1 kg \cdot 0{,}25^2\; m^2$$

$$J_{ges} = \frac{1}{12} kg\;\, m^2 + \frac{1}{16} kg\;\, m^2 = \frac{28}{192} kg\;\, m^2 = \frac{7}{48} kg\;\, m^2$$

$$J_{ges} = (0{,}08333 + 0{,}0625) kg\, m^2 = 0{,}1458\, kg\, m^2$$

Eigenfrequenz: $\omega_0 = \sqrt{\frac{m\,g\,d}{J}} = \sqrt{\frac{48\,kg\,10\,m\cdot 1\,m}{7\,kg\,m^2\,s^2\,4}} = 4{,}14\,s^{-1}$

(mit g = 9,81 m s^{-2}: $\omega_0 = \sqrt{\frac{m\,g\,d}{J}} = \sqrt{\frac{48\,kg\,9{,}81\,m\cdot 1\,m}{7\,kg\,m^2\,s^2\,4}} = 4{,}10\,s^{-1}$)

Schwingungsdauer: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 1{,}52\,s$

(mit g = 9,81 m s^{-2}: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 1{,}53\,s$)

3b. Mathematisches Pendel: $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

Pendellänge: $l = \frac{g}{\omega_0^2} = \frac{10\,m\,s^{-2}}{4{,}14^2\,s^{-2}} = 0{,}583\,m$

3c. Es ändert sich nichts. Die Schwingungsdauer ist unabhängig von der Masse.

3d. Gedämpfte Schwingung: $\varphi(t) = \varphi_0\,e^{-\beta t}\left(\frac{\beta}{\omega_0}\sin(\omega_e\,t) + \cos(\omega_e\,t)\right)$

Für $t = 5T_e$ gilt: $\varphi(5T_e) = \varphi_0\,e^{-\beta 5 T_e}\left(\frac{\beta}{\omega_0}\sin(\omega_e\,5T_e) + \cos(\omega_e\,5T_e)\right)$

Es gilt: $\sin(\omega_e\,5T_e) = \sin\left(\omega_e\,5\frac{2\pi}{\omega_e}\right) = \sin(5\cdot 2\pi) = 0$

und: $\cos(\omega_e\,5T_e) = \cos\left(\omega_e\,5\frac{2\pi}{\omega_e}\right) = \cos(5\cdot 2\pi) = 1$

Es folgt:

$$\varphi(5T_e) = \varphi_0\,e^{-\beta 5 T_e}$$

$$\frac{\varphi(5T_e)}{\varphi_0} = e^{-\beta 5 T_e}$$

$$\beta = \frac{1}{5T_e}\ln\frac{\varphi_0}{\varphi(5T_e)}$$

Exakte Lösung: $\beta = \frac{1}{5T_e}\ln\frac{\varphi_0}{\varphi(5T_e)} = \frac{1}{5\cdot T_e}\ln\frac{20°}{2°} = \frac{\ln 10}{5\cdot T_e}$

Näherung: $T_e \cong T_0$ $\beta = \frac{1}{5T_0}\ln\frac{\varphi_0}{\varphi(5T_0)} = \frac{1}{5\cdot 1{,}52\,s}\ln\frac{20°}{2°} = 0{,}303\,s^{-1}$

Man kann die Abklingkonstante auch exakt bestimmen:

Es gilt: $\omega_e^2 = \omega_0^2 - \beta^2$

$$\frac{4\pi^2}{T_e^2} = \frac{4\pi^2}{T_0^2} - \frac{(\ln 10)^2}{5^2\,T_e^2}$$

$$\frac{4\pi^2}{T_e^2} = \frac{4\pi^2}{T_0^2} - \frac{(\ln 10)^2}{5^2\,T_e^2}$$

$$\frac{4\pi^2}{T_e^2}\left(1+\frac{(\ln 10)^2}{4\pi^2 5^2}\right)=\frac{4\pi^2}{T_0^2}$$

$$T_e^2=\left(1+\frac{(\ln 10)^2}{4\pi^2 5^2}\right)\cdot T_0^2=1{,}00537\cdot T_0^2$$

$$T_e=1{,}00268\cdot T_0$$

$$\beta=\frac{\ln 10}{5\cdot 1{,}00268\,T_0}=0{,}9973\cdot\beta_{Näherung}$$

Der Unterschied ist aber vernachlässigbar. Für diese Lösung gibt es Sonderpunkte.

3e. Die potentielle Energie entspricht der Hubarbeit für den Schwerpunkt:

$$E_{pot}=m_S\ g\ h(20°)$$

mit:

$$\cos 20°=\frac{L/4-h(20°)}{L/4}=1-\frac{4\cdot h(20°)}{L}$$

$$h(20°)=\frac{L}{4}\left(1-\cos 20°\right)=0{,}25\,m\left(1-0{,}9396\right)=0{,}015\,m$$

Potentielle Energie:

$$E_{pot}=m_S\ g\ h(20°)=0{,}15\,J$$

3f. Es sind verschiedene Lösungswege möglich. In vorliegenden Beispiel Fall betrachten wir die kinetischen Energien zweier aufeinanderfolgender Nulldurchgänge.

Kin. Energie n-te Schwingung:

$$E_{kin}^{n}=\frac{1}{2}J\,\omega_n^2=\frac{1}{2}J\,\dot\varphi_n^2$$

Kin. Energie (n+1)-te Schwingung:

$$E_{kin}^{n+1}=\frac{1}{2}J\,\omega_{n+1}^2=\frac{1}{2}J\,\dot\varphi_{n+1}^2$$

Es folgt:

$$\frac{E_{kin}^{n+1}}{E_{kin}^{n}}=\frac{\dot\varphi_{n+1}^2}{\dot\varphi_n^2}=\left(\frac{\dot\varphi_{n+1}}{\dot\varphi_n}\right)^2$$

$$\frac{E_{kin}^{n+1}}{E_{kin}^{n}}=\frac{\dot\varphi_{n+1}^2}{\dot\varphi_n^2}=\left(\frac{\dot\varphi_{n+1}}{\dot\varphi_n}\right)^2$$

$$\frac{E_{kin}^{n+1}}{E_{kin}^{n}}=\left(\frac{\dot\varphi_{n+1}}{\dot\varphi_n}\right)^2=\left(\frac{\varphi_0\,e^{-\beta T_{n+1}}\,\frac{\omega_0^2}{\omega_e}\sin(\omega_e\,T_{n+1})}{\varphi_0\,e^{-\beta T_n}\,\frac{\omega_0^2}{\omega_e}\sin(\omega_e\,T_n)}\right)^2$$

$$\frac{E_{kin}^{n+1}}{E_{kin}^{n}}=\left(\frac{\dot\varphi_{n+1}}{\dot\varphi_n}\right)^2=\left(\frac{e^{-\beta T_{n+1}}\sin(\omega_e\,T_{n+1})}{e^{-\beta T_n}\sin(\omega_e\,T_n)}\right)^2=\left(\frac{e^{-\beta T_{n+1}}}{e^{-\beta T_n}}\right)^2$$

$$\frac{E_{kin}^{n+1}}{E_{kin}^{n}}=\left(\frac{e^{-\beta T_{n+1}}}{e^{-\beta T_n}}\right)^2=\left(e^{-ß T_e}\right)^2=e^{-2\,ß T_e}$$

Näherung: $T_e\approx T_0$

$$\frac{E_{kin}^{n+1}}{E_{kin}^{n}}=e^{-2\,ß T_e}=\exp(-2\cdot 0{,}303\cdot 1{,}52)=0{,}398\approx 40\%$$

Die (n+1) Schwingung hat also nur noch 40% der Energie der n-ten Schwingung. Bei jeder Schwingung gehen also 60% der Energie verloren.