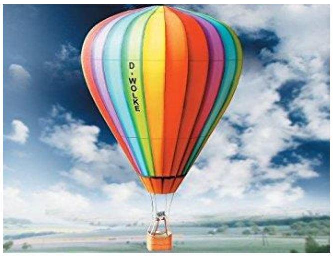
Fachhochschule Hannover Klausur Physik II 13.03.2018
Fachbereich Maschinenbau Zeit: 90 min
zum Fach Physik II im WS17/18 Hilfsmittel: Formelsammlung zur Vorlesung

---



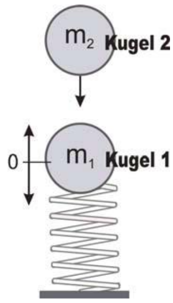
1. Heizluftballone (Mongolfieren) werden seit 1783 betrieben. Heutige Ballone haben ein typisches Volumen von 5000 m^3 und eine Masse von 150 kg. Die Masse von Korb und Brenner beträgt ebenfalls 150 kg. Es soll eine Last von fünf Personen (500 kg) sowie Gasflaschen (160 kg) zugeladen werden. Am Startort herrscht ein Luftdruck von 990 hPa und eine Temperatur von 14°C.

a. Welche Temperatur muss das Gas im Ballon erreichen, damit der Ballon mit einer Beschleunigung von 0,5 m s^{-2} aufsteigen kann? 15 Punkte

b. Wie hoch steigt der Ballon bei Annahme konstanter Temperaturbedingungen? 15 Punkte

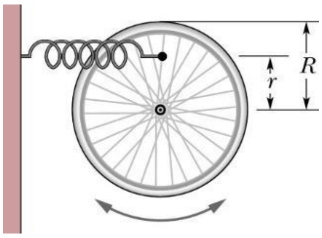
(Standarddichte der Luft: $\rho_{T0,p0} = 1,292\,kg\,m^{-3}$ mit $T_0 = 273,15\,K$ und $p_0 = 1013,25\,hPa$. Barometrische Höhenformel als Näherung für isotherme Bedingungen: $\rho(h) = \rho_0 \cdot \exp(-h/8,0\,km)$)

2. An einer unbelasteten, senkrecht stehenden Spiralfeder wird oben eine Kugel 1 mit $m_1 = 400\,g$ befestigt. Durch die Belastung mit m_1 wird die Feder um 4,44 cm zusammengedrückt. Auf das ruhende Feder-Masse-System mit Auslenkung Null fällt anschließend aus einer Höhe von 45 cm eine zweite Kugel 2 mit $m_2 = 200\,g$. Nach dem Stoß von m_2 mit m_1 springt m_2 auf eine Höhe von 5 cm zurück und das Feder-Masse System mit m_1 schwingt (nahezu) ungedämpft. Welche Beschleunigung wirkt bei einer Auslenkung von 6,66 cm auf m_1?



Gesamte Aufgabe 25 Punkte

3. Ein Rad (vereinfacht: Hohlzylinder) mit einem Radius von $R = 30\,cm$ und einer Masse von $m = 800\,g$ kann um eine feste Achse drehen. Eine seiner Speichen ist im Abstand $r = 25\,cm$ von der Achse über eine Feder mit Federkonstante $20\,N\,m^{-1}$ mit einer Wand verbunden (siehe Skizze). Das Drehpendel soll bei kleinen Auslenkungen betrachtet werden. Es verliert pro Periode 90% seiner Schwingungsenergie durch viskose Dämpfung.



a. Bestimmen Sie die Schwingungsdauer der ungedämpften und der gedämpften Schwingung.

b. Nach wie vielen Perioden ist die Winkelamplitude kleiner gleich 1% der Anfangsamplitude?

Gesamte Aufgabe 25 Punkte

4. Die Federung eines PKW mit der (gefederten) Masse von 1.500 kg besitzt ungedämpft eine Schwingungsdauer von 0,8 s. Eine Bedämpfung bewirkt, dass bei einem mit vier Personen von zusammen 300 kg besetzten Fahrzeug die Fahrwerksauslenkungen nach zwei Schwingungsperioden um 95% reduziert werden.

a. Welche Federkonstante und welche Abklingkonstante hat das Fahrwerk? 10 Punkte
(Annahme: Viskose Dämpfung)

b. Berechnen Sie die Schwingungsdauer des mit 4 Personen besetzten PKW unter Berücksichtigung der Dämpfung. 5 Punkte

c. Der mit 4 Personen besetzte Wagen wird auf einem Schotterweg mit sinusförmigen Bodenwellen einer Periodenlänge von 3 m zu erzwungenen Schwingungen angeregt. Welche Geschwindigkeitsbereiche muss man wählen, damit die Amplitudenüberhöhung unterhalb von 1,5 bleibt? 15 Punkte

Hilfsmittel: eine der freigegebenen Physik 1-Formelsammlungen, Taschenrechner nach Vorgabe
Bearbeitungshinweise: Der Lösungsweg muss erkennbar und nachvollziehbar sein.
Man kann $g = 10\,m\,s^{-2}$ verwenden.

Die Aufgaben sind soweit wie möglich buchstabenmäßig durchzurechnen. Geben Sie die Ergebnisse der Zahlenrechnung mit sinnvoller Ziffernzahl an.

Lösung:

1a. Gesucht ist die Temperatur im Inneren des Ballons bei der eine Aufstiegsbeschleunigung von $a = 1\,m\,s^{-2}$ erreicht wird. Am Startort beträgt die Lufttemperatur $T_1 = 14°C = 287{,}15\,K$ und der Druck $p_1 = 990\,hPa$.

Luftdichtestandard: $\rho_{T0,p0} = 1{,}292\,kg\,m^{-3}$ mit $T_0 = 273{,}15\,K$, $p_0 = 1013{,}25\,hPa$

Luftdichte am Startort $\rho_{T1,p1}$ mit $T_1 = 14°C = 287{,}15\,K$ und $p_1 = 990\,hPa$

Luftdichte am Startort:
$$\rho_{T1,p1} = \frac{p_1 \cdot T_0}{p_0 \cdot T_1} \cdot \rho_{T0,p0}$$
$$\rho_{T1,p1} = \frac{990 \cdot 273{,}15}{1013{,}25 \cdot 287{,}15} \cdot 1{,}292\,kg\,m^{-3} = 1{,}2008\,kg\,m^{-3}$$

Für die Kräfte gilt: Auftriebskraft = Gewichtskraft + Beschleunigungskraft

nach D'Alembert gilt:
$$\left(F_A - F_g\right) - m_{ges}\,a = 0 \qquad (1)$$

Auftriebskraft: $F_A = \rho_{T1,p1} \cdot V_B \cdot g$

Gewichtskraft: $F_g = m_{ges} \cdot g$

Gesamtmasse des Ballons am Startort:
$$m_{ges} = m_B + m_{K+B} + m_P + m_{Gf} + m_{Luft}$$
$$m_{ges} = 150\,kg + 150\,kg + 500\,kg + 160\,kg + m_{Luft}$$
$$m_{ges} = 960\,kg + m_{Luft} = m' + m_{Luft}$$

$m_{Luft} = \rho_{T2,p1} \cdot V_B$ wobei T_2 die gesuchte Lufttemperatur im Inneren des Ballons bezeichnet.

Es folgt für Gl. (1):
$$\rho_{T1,p1} \cdot V_B \cdot g - \left(m' + m_{Luft}\right) g - \left(m' + m_{Luft}\right) a = 0$$
$$\rho_{T1,p1} \cdot V_B - m'\left(1 + \frac{a}{g}\right) - m_{Luft}\left(1 + \frac{a}{g}\right) = 0$$
$$\rho_{T1,p1} \cdot V_B - m'\left(1 + \frac{a}{g}\right) - \rho_{T2,p1} \cdot V_B\left(1 + \frac{a}{g}\right) = 0$$
$$\rho_{T2,p1} = \frac{\rho_{T1,p1} - \frac{m'}{V_B}\left(1 + \frac{a}{g}\right)}{\left(1 + \frac{a}{g}\right)} = \frac{\rho_{T1,p1}}{1 + \frac{a}{g}} - \frac{m'}{V_B}$$

Dichte der Luft im Inneren:
$$\rho_{T2,p1} = \left(\frac{1{,}2008}{1 + \frac{0.5}{9{,}81}} - \frac{960}{5000}\right) kg\,m^{-3} = 0{,}9506\,kg\,m^{-3}$$

Temperatur im Inneren:
$$T_2 = \frac{p_1 \cdot \rho_{T0,p0}}{p_0 \cdot \rho_{T2,p1}} \cdot T_0$$

Ergebnis:
$$T_2 = \frac{990 \cdot 1{,}292}{1013{,}25 \cdot 0{,}9506} \cdot 273.15\,K = 362{,}7\,K = 89{,}6°C$$

1b. Es gelten isotherme Bedingungen: Die Lufttemperatur außen und im Inneren des Ballons unabhängig von der Höhe konstant. Die Luftdichte ändert sich nach der barometrischen Höhenformel (vereinfacht für isotherme Bedingungen) mit der Höhe *h* über dem Startort.

Luftdicht $\rho(h)$: $\rho(h) = \rho_0 \cdot \exp(-h/8{,}0\,km)$

Luftdichte außen: $\rho_a(h) = \rho_{T1,p1}(h) = \rho_{T1,p1} \cdot \exp(-h/8{,}0\,km)$

Luftdichte innen: $\rho_i(h) = \rho_{T2,p1}(h) = \rho_{T2,p1} \cdot \exp(-h/8{,}0\,km)$

Der Ballon erreicht die Maximalhöhe, wenn die Schwebebedingung,

$$\text{Auftriebskraft} = F_A(h) = F_g(h) = \text{Gewichtskraft},$$

erreicht ist.

Schwebebedingung: $\rho_{T1,p1}(h) \cdot V_B \cdot g = \left(m' + \rho_{T2,p1}(h) \cdot V_B\right) \cdot g$

$$\rho_{T1,p1}(h) - \rho_{T2,p1}(h) = \frac{m'}{V_B}$$

$$\left(\rho_{T1,p1} - \rho_{T2,p1}\right) \cdot \exp(-h/8{,}0\,km) = \frac{m'}{V_B}$$

$$\exp(-h/8{,}0\,km) = \frac{m'}{V_B \cdot \left(\rho_{T1,p1} - \rho_{T2,p1}\right)}$$

Lösung: $h = 8{,}0 km \cdot \ln\left(\frac{V_B \cdot \left(\rho_{T1,p1} - \rho_{T2}\right)}{m'}\right)$

Einsetzen: $h = 8{,}0\,km \cdot \ln\left(\frac{5000\,m^3 \cdot (1{,}2008 - 0{,}9506)\,kg\,m^{-3}}{960\,kg}\right)$

Ergebnis: $h = 8.000\,m \cdot 0{,}2649 = 2119\,m$

2. Für die Verformung der Feder durch die Gewichtskraft von Kugel 1 gilt:

$$m_1 \cdot g = D \cdot s_0$$

Federkonstante: $D = \frac{m_1 \cdot g}{s_0} = \frac{0{,}4\,kg \cdot 10\,m\,s^{-2}}{0{,}0444\,m} = 90{,}09\,Nm^{-1} \cong 90\,Nm^{-1}$

Fall der Kugel 2 aus der Höhe $H_0 = 0{,}45\,m$ führt zu einer Geschwindigkeit v_2:

Es gilt: $m_2 \cdot g \cdot H_0 = \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2$

Geschw. von m_2 vor Stoß: $v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot H_0} = \sqrt{2 \cdot 10\,m\,s^{-2} \cdot 0{,}45\,m} = 3\,m\,s^{-1}$

Nach dem Stoß springt die Kugel 2 zurück auf $H_1 = 0{,}05\,m$.

Geschw. von m_2 nach Stoß: $|u_2| = \sqrt{2 \cdot g \cdot H_1} = \sqrt{2 \cdot 10\,m\,s^{-2} \cdot 0{,}05\,m} = 1\,m\,s^{-1}$

Da die Masse nach dem Stoß zurückspringt, ist

$$u_2 = -1\,m\,s^{-1}$$

Impulserhaltungssatz: $m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot \left(-|u_2|\right)$

Entspricht: $m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot u_1 - m_2 \cdot u_2$

Geschw. von m_1 nach Stoß: $u_1 = \frac{m_2}{m_1} \cdot v_2 + \cdot \frac{m_2}{m_1} u_2 = \frac{1}{2} \cdot 3\,ms^{-1} + \frac{1}{2} \cdot 1\,ms^{-1} = 2{,}0\,ms^{-1}$

Ungedämpfte Schwingung des Feder-Masse-Systems:

Eigenkreisfrequenz: $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m_1}} = \sqrt{\frac{90\,N m^{-1}}{0,4\,kg}} = 15,008\,s^{-1} \cong 15\,s^{-1}$

Periodendauer: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0,4187\,s$

Funktionen der harmonischen Schwingung, wobei sich m_1 für $s(t) > 0$ nach „unten" bewegt.

$$s(t) = \hat{s} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$$
$$v(t) = \hat{s} \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$$
$$a(t) = -\hat{s} \cdot \omega_0^2 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$$

Amplitude der Schwingung: $\hat{s} = \frac{v(t=0)}{\omega_0} = \frac{u_1}{\omega_0} = \frac{2,0\,ms^{-1}}{15,008\,s^{-1}} = 0,1333\,m = 13,33\,cm$

Die Auslenkung $s(t_1) = 0,0666\,m$ wird erstmals zum Zeitpunkt t_1 erreicht:

$$t_1 = \frac{1}{\omega_0} \cdot \arcsin\left(\frac{0,0666}{0,1333}\right) = 0,0349\,s$$

Die Beschleunigung zum Zeitpunkt t_1 beträgt:

$$a(t_1) = -\hat{s} \cdot \omega_0^2 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t_1) = -15,0\,ms^{-2}$$

3a. Massenträgheitsmonent: $J = m \cdot R^2 = 0,8 \cdot 0,3^2 m^2 = 0,072\,kg\,m^{-2}$

Rückstelldrehmoment: $M = D^* \cdot \varphi = F_{el} \cdot r = D \cdot r \cdot s$

Für kleine Winkel gilt: $s \cong r \cdot \varphi$

Es folgt: $M = D^* \cdot \varphi \cong D \cdot r^2 \cdot \varphi$

Winkelrichtgröße: $D^* \cong D \cdot r^2 = 20 Nm^{-1} \cdot 0,25^2\,m^2 = 1,25\,N\,m$

Eigenkreisfrequenz: $\omega_0 = \sqrt{\frac{D^*}{J}} = \sqrt{\frac{1,25\,N\,m}{0,072\,kg\,m^2}} = 4,167\,s^{-1}$

Schwingungsdauer der ungedämpften Schwingung:

Ergebnis: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{4,167\,s^{-1}} = 1,508\,s$

Relativer Energieverlust pro Schwingung 90%. Es bleibt also ein Energieanteil von 10%:

$$\frac{E_{n+1}}{E_n} = 0,1 = \left(\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}\right)^2 = \left(e^{-\Lambda}\right)^2 = e^{-2\cdot\Lambda}$$

$$\ln(0,1) = -2 \cdot \Lambda$$

$$\Lambda = -\frac{\ln(0,1)}{2} = 1,1513$$

Wobei $\Lambda = \delta \cdot T_d$ logarithmisches Dekrement genannt wird.

Es gilt: $$\omega_0^2 = \omega_d^2 + \delta^2 = \frac{4\pi^2}{T_d^2} + \frac{\Lambda^2}{T_d^2} = \frac{1}{T_d^2} \cdot \left(4\pi^2 + \Lambda^2\right)$$

$$T_d = \frac{1}{\omega_0} \cdot \sqrt{\left(4\pi^2 + \Lambda^2\right)} = T_0 \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{\Lambda^2}{4\pi^2}\right)}$$

$$T_d = 1,508\, s \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{1,1513^2}{4\pi^2}\right)}$$

Ergebnis: $$T_d = 1,508\ s \cdot \sqrt{1 + 0,003045} = 1,533\, s$$

3b. Winkelauslenkung: $$\varphi\left(t = m \cdot T_d\right) = \varphi\left(t = 0\right) \cdot e^{-m \cdot \Lambda}$$

$$\ln\left(\frac{\varphi\left(t = m \cdot T_d\right)}{\varphi\left(t = 0\right)}\right) = -m \cdot \Lambda$$

Es soll gelten: $$\frac{\varphi\left(t = m \cdot T_d\right)}{\varphi\left(t = 0\right)} \le 0,01$$

Ergebnis: $$\mathrm{m} \ge -\frac{\ln\left(0,01\right)}{\Lambda} = -\frac{-4,6052}{1,1513} = 4$$

4a. Schwingungsdauer der ungedämpften Schwingung des leeren PKW:

$$T_{0,leer} = 0,8\, s$$

Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung des leeren PKW:

$$\omega_{0,leer} = \frac{2\pi}{T_{0,leer}} = 7,854\, s^{-1}$$

$$\omega_{0,leer}^2 = \frac{4\pi^2}{T_{0,leer}^2} = \frac{D}{m_{leer}}$$

Gesamtfederkonstante: $$D = \frac{4\pi^2 \cdot m_{leer}}{T_{0,leer}^2} = 92,53\, kN\, m^{-1}$$

Dämpfungseigenschaften: $$\frac{0,05 \cdot \hat{x}}{\hat{x}} = e^{-2 \cdot \Lambda}$$

Logarithmisches Dekrement: $$\Lambda = -\frac{\ln\left(0,1\right)}{2} = 1,498 \cong 1,5$$

Es gilt: $$\Lambda = \delta \cdot T_d = 1,5$$

mit $\delta =$ Abklingkonstante, $T_d =$ Schwingungsdauer der viskos gedämpften Schwingung des PKW mit 4 Personen:

Es gilt: $$\frac{2\pi}{T_d} = \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

wobei ω_0 die Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung für den PKW mit

4 Personen bezeichnet: $$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m_{leer} + 300\,kg}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{92.530\,N\,m^{-1}}{(1500+300)\,kg}} = 7{,}170\,s^{-1}$$

und: $$T_d = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

Es folgt: $$\Lambda = \delta \cdot T_d = \delta \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

Quadrieren: $$\Lambda^2 = \delta^2 \cdot \frac{4\pi^2}{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$$\Lambda^2 \omega_0^2 - \Lambda^2 \delta^2 = 4\pi^2\,\delta^2$$

$$\Lambda^2 \omega_0^2 = \delta^2 \left(4\pi^2 + \Lambda^2\right)$$

Abklingkonstante: $$\delta = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \frac{4\pi^2}{\Lambda^2}}} = \frac{7{,}170\,s^{-1}}{\sqrt{1 + \frac{4\pi^2}{1{,}498^2}}} = 1{,}663\,s^{-1}$$

Abklingkonstante: $$\delta = \frac{b}{2 \cdot \left(m_{leer} + 300\,kg\right)}$$

Dämpfungskonstante: $$b = 2 \cdot \delta \cdot \left(m_{leer} + 300\,kg\right)$$

$$b = 2 \cdot 1{,}663\,s^{-1} \cdot 1800\,kg = 5985\,kg\,s^{-1}$$

4b. Eigenkreisfrequenz der gedämpften Schwingung von PKW mit vier Personen:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{7{,}170^2 - 1{,}663^2}\,s^{-1} = 6{,}974\,s^{-1}$$

Schwingungsdauer der gedämpften Schwingung von PKW mit vier Personen:

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{6{,}974\,s^{-1}} = 0{,}90\,s$$

4c. Resonanzkreisfrequenz: $$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{7{,}170^2 - 2 \cdot 1{,}663^2}\,s^{-1}$$

$$\omega_R = \sqrt{7{,}170^2 - 2 \cdot 1{,}663^2}\,s^{-1} = 6{,}773\,s^{-1}$$

Der Wert von ω_R dient zur Orientierung, er wird zur Lösung von 4c. nicht explizit benötigt.

Amplitudenüberhöhung: $$\frac{\hat{x}(\omega, \omega_0, \delta)}{\hat{x}(\omega = 0, \omega_0, \delta)} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2\delta\,\omega\right)^2}}$$

Gesucht sind Werte von ω, für die gilt: $\dfrac{\hat{x}(\omega, \omega_0, \delta)}{\hat{x}(\omega = 0, \omega_0, \delta)} < 1{,}5$,

Berechne zunächst: $$\frac{\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2\delta\,\omega\right)^2}} = 1{,}5$$

$$\omega_0^4 = 2,25 \cdot \left(\omega_0^4 - 2\omega_0^2 \omega^2 + \omega^4 + 4\delta^2 \omega^2 \right)$$
$$0 = 1,25 \cdot \omega_0^4 - 4,5 \cdot \omega_0^2 \cdot \omega^2 + 9 \cdot \delta^2 \cdot \omega^2 + 2,25 \omega^4$$
$$\omega^4 + 2 \cdot \omega^2 \left(2\delta^2 - \omega_0^2 \right) = -\frac{1,25}{2,25} \cdot \omega_0^4$$
$$\left(\omega^2 + \left(2\delta^2 - \omega_0^2 \right) \right)^2 = \left(2\delta^2 - \omega_0^2 \right)^2 - \frac{1,25}{2,25} \cdot \omega_0^4$$
$$\omega^2 = -\left(2\delta^2 - \omega_0^2 \right) \pm \sqrt{\left(2\delta^2 - \omega_0^2 \right)^2 - \frac{1,25}{2,25} \cdot \omega_0^4}$$

Positive Lösung: $\omega_+^2 = 71,1062\, s^{-2}$

daraus die positive Wurzel: $\omega_+ = 8,432\, s^{-1}$

Negative Lösung: $\omega_-^2 = 20,6451 s^{-2}$

Daraus die positive Wurzel: $\omega_- = 4,544\, s^{-1}$

Damit die Resonanzüberhöhung unterhalb von 1,5 bleibt, muss für die Erreger-Kreisfrequenz gelten: $\omega_u < 4,544\, s^{-1}$ und $\omega_o > 8,432\, s^{-1}$

Beim Fahren über die Bodenwellen des Schotterwegs mit der Periodenlänge $L = 3\, m$ gilt folgender Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit v und der Erreger-Kreisfrequenz ω: $v = \frac{L}{T} = \frac{L \cdot \omega}{2\pi}$

Unterer Geschwindigkeitsbereich: $v_u < \frac{L \cdot \omega_u}{2\pi} = \frac{3m \cdot 4,544\, s^{-1}}{2\pi} = 2,17\, m\, s^{-1} = 7,8\, km\, h^{-1}$

Oberer Geschwindigkeitsbereich: $v_o > \frac{L \cdot \omega_o}{2\pi} = \frac{1m \cdot 8,432\, s^{-1}}{2\pi} = 4,03\, m\, s^{-1} = 14,5\, km\, h^{-1}$