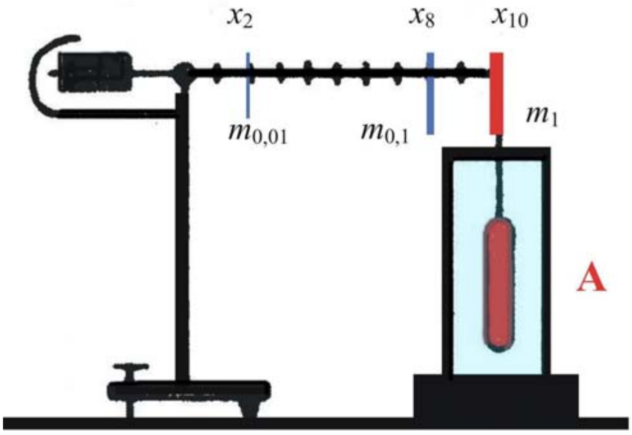
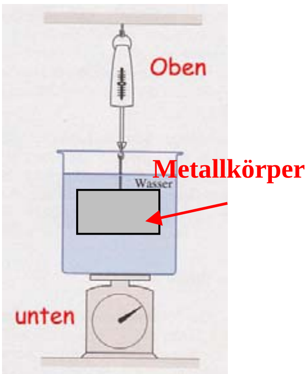



I-1. Im Physiklabor wird die Dichte von Flüssigkeiten mit einer Auftriebswaage (Mohrsche Waage) bestimmt. Der Auftriebskörper (**A**) taucht vollständig in die zu untersuchende Flüssigkeit ein. Zunächst wird die Waage mit destilliertem Wasser ($\rho_W = 0,9982\, g\, cm^{-3}$ bei $T = 20°C$) austariert. Dies erfordert, die Masse m_1 im Abstand $x_{10} = 10$ Teilstrichen vom Drehpunkt aufzuhängen.

a. Dann werden unbekannte Flüssigkeiten untersucht: Um die Waage jetzt ins Gleichgewicht zu bringen müssen zusätzlich die beiden Massen $m_{0,01} = 0,01 \cdot m_1$ am Teilstrich x_2 und $m_{0,1} = 0,1 \cdot m_1$ am Teilstrich x_8 aufgehängt werden. Wie groß ist die Dichte der Flüssigkeit?

b. Welche Massen m_1, $m_{0,1}$, $m_{0,01}$....usw. müssen wo aufgehängt werden, damit bei der Dichtebestimmung von Benzol ($\rho_3 = 0,869\, g\, cm^{-3}$) die Waage ins Gleichgewicht gebracht wird?

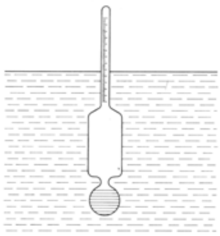
I-2. Ein Becher der Masse $m_B = 0,5\, kg$ sei mit Wasser $m_W = 5\, kg$ gefüllt ($\rho_W = 1,00\, g\, cm^{-3}$) und stehe auf einer Waage (*unten*). Ein Metallkörper unbekannter Masse und Dichte sei an einer Federwaage (*oben*) aufgehängt und tauche vollständig in das Wasser ein. (Siehe Abbildung rechts) Die oberer Waage zeigt 1,56 kg, und unterer 5,94 kg.



a. Welche Dichte hat der Metallkörper? Um welches Element könnte es sich handeln?

b. Welche Masse hat der Metallkörper?

I-3. Ein Dichtemessgerät für Flüssigkeiten (Aräometer) besteht aus einem Schwimmkörper mit einem Volumen von 8 cm³ und einer aufgesetzten Säule (r = 0,25 cm und Länge l = 12 cm). Beide Teile bestehen aus Glas und haben insgesamt eine Leermasse von 6 g. Der Körper wird mit Bleikügelchen gefüllt und schwimmt deshalb aufrecht in der zu untersuchenden Flüssigkeit.



a. Wie viel Blei muss eingefüllt werden, damit bei einer Dichte von 0,9978 g/cm³ (Wasser bei 22°C) die Säule bis zur Mitte eintaucht?

b. Welche kleinste und welche größte Dichte kann man jetzt mit dem Aräometer messen?

Lösungen:

I-1a. Lösung: $\rho_x = 1,082 \cdot 0,9982\, g\, cm^{-3} = 1,080\, g\, cm^{-3}$

I-1b. $\dfrac{\rho_{Benzol}}{\rho_{Wasser}} = \dfrac{0,869}{0,9982} = 0,871$

I-2a. Lösung: $\rho_x = 4,54\, g\, cm^{-3}$. Es handelt sich um Titan

I-2b. Masse: $m_x = \dfrac{4,54}{4,54 - 1,00} 1,56\, kg = 2,00 kg$

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V_{Atom}}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1,17 \cdot 10^{-23}\ cm^3}{4 \cdot \pi}} = 0,140\ nm$$

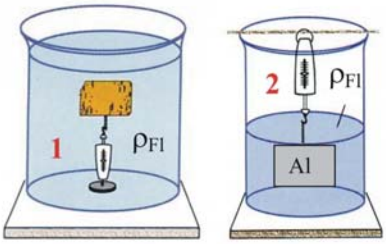
Tabellenwert zum Vergleich: $R_{Fe} = 0,126\, nm$

I-3a. $m_{Pb} = 0,9978\, g\, cm^{-3} \cdot 9,178\, cm^3 - 6\, g = 3,158\, g$

I-3b. $\rho_{\min} = 0,9978 \cdot \dfrac{9,178}{10,356}\ g\ cm^{-3} = 0,8843\, g\ cm^{-3}$

Größte Dichte: $\rho_{\max} = 0,9978 \cdot \dfrac{9,178}{8}\ g\ cm^3 = 1,145\ g\ cm^3$

II-1. Zur Bestimmung der Dichte einer unbekannten Flüssigkeit mit Dichte ρ_{Fl} untersucht man das Verhalten von einem Stück Kork (1) (Dichte Kork: $\rho_{Kork} = 200\,kg\,m^{-3}$) und einem Gewichtsstück aus Aluminium (2) (Dichte Aluminium: $\rho_{Al} = 2,70\,g\,cm^{-3}$). Die Volumina der beiden Auftriebskörper sind gleich. Die Federwaage (1) zeigt eine Kraft von $2,31\,N$, die Federwaage (2) $7,50\,N$.

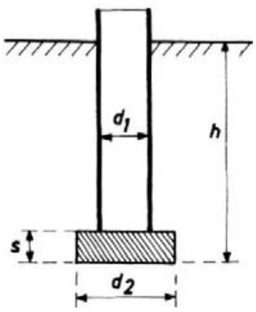


a. Wie groß ist das Volumen der Probekörper?

b. Welche Dichte ρ_{Fl} hat die Flüssigkeit?

II-2. Ein Kupferdraht mit einer Zugfestigkeit von 220 N mm^{-2} soll senkrecht ins Meer hinab gelassen werden. Bei welcher Länge wird der Kupferdraht zerreißen? (Dichte Cu: $\rho_{Cu} = 8,95\,g\,cm^{-3}$, Dichte Meerwasser: $\rho_{MW} = 1,025\,g\,cm^{-3}$)

II-3. Ein dünnwandiges Stahlrohr mit Innendurchmesser $d_1 = 100\,mm$, dessen unteres Ende mit einer quadratischen Kupferplatte verschlossen ist, wird ins Wasser getaucht. Die Platte mit Kantenlänge $d_2 = 150\,mm$ und einer Dicke $s = 10\,mm$ soll nur durch den Wasserdruck gegen das Rohrende gedrückt werden. Welche Eintauchtiefe h ist erforderlich, damit sich die Scheibe nicht vom Rohr löst? ($\rho_{Cu} = 8,95\,g\,cm^{-3}$, $\rho_W = 1,00\,g\,cm^{-3}$)



II-4. Zur Bestimmung der Dichte werden zwei metallische Probekörper jeweils in Luft (*L*) und in Wasser (*W*) gewogen. Das Verhältnis der Waagenanzeigen A_L / A_W ergibt für Probe 1 $(A_L / A_W)_1 = 1,281$ und für Probe 2 $(A_L / A_W)_2 = 1,054$.

a. Bestimmen Sie die Dichten ρ_1 und ρ_2. Aus welchen Elementen bestehen die Probekörper?

Lösungen:

II-1a. Lösung: $V = \frac{9,81\,m^3}{9,81 \cdot 2500} = 0,0004\,m^3 = 400\,cm^3$

II-1b. Lösung: $\rho_{Fl} = 789\,kg\,m^{-3} = 0,789\,g\,cm^{-3}$

II-2. Lösung: $L = \frac{220 \cdot 10^3}{(8,95 - 1,025) \cdot 9,81} m = 2830\,m$

II-3. Lösung: $h = 0,01\,m \cdot \left(\frac{4}{\pi} \frac{150^2}{100^2} \cdot \left(\frac{8,95}{1,00} - 1 \right) + 1 \right) = 0,238\,m$

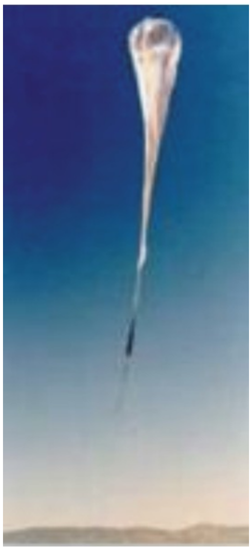
II-4. Probekörper 1: $\rho_1 = 4,54\,g\,cm^{-3}$

Beim Probekörper 1 handelt es sich um: Ti

Probekörper 2: $\rho_1 = 19,3\,g\,cm^{-3}$

Beim Probekörper 2 handelt es sich um: Au

III-1. Der Franzose Founier möchte mit einem Heliumballon bis in eine Höhe von ca. 40 000 m aufsteigen und von dort mit dem Fallschirm abspringen. (Das Bild zeigt den Ballon kurz vor einem Fehlversuch im Jahr 2003, bei dem die Ballonhülle aus 16 µm Polyethylen riss). Das Volumen des prallen Ballon beträgt $V_B = 510\,000\,m^3$. Rüstmasse und Nutzlast betragen jeweils 1000 kg.



a. Warum füllt man beim Start, wie auf dem Bild erkennbar, nur einen Teil des Ballons mit dem Auftriebsgas?

b. Welches Mindestvolumen Helium V_1^{He} ist erforderlich, damit der Ballon bei einem Luftdruck von $p_1 = 980\,hPa$ und einer Temperatur von $T_1 = 20°C$ am Startort schweben kann?

c. Welche Volumen Wasserstoffgas hätte man einfüllen müsse, damit der Ballon schweben kann?

d. Der Ballon wird mit dem Doppelten des Mindestvolumens gefüllt. Welche Kraft muss den Ballon bis zum Start am Boden halten? Welche Beschleunigung hat er nach dem Start?

e. Beim Aufstieg des Ballons sinkt der äußere Luftdruck. Das Gas im Ballon dehnt sich aus und füllt in der „Prallhöhe“ h_P das gesamte Ballonvolumen V_B. Berechnen Sie h_P unter der vereinfachten Annahme, dass die barometrische Höhenformel gilt und Luftdruck und Luftdichte proportional sind.

f. Der gezeigte Ballon soll "offen" sein, d. h. beim Steigen oberhalb der Prallhöhe h_p kann überschüssiges Helium entweichen. Welche Maximalhöhe h_o^{max} kann der Ballon unter den angegeben Modellbedingungen erreichen?

g. Welche Maximalhöhe h_g^{max} würde der Ballon erreichen, wenn der Ballon "geschlossen" wäre, d. h. wenn oberhalb der Prallhöhe h_p kein Helium die Ballonhülle verlassen könnte?

h. Vergleichen Sie h_o^{max} und h_g^{max}. Wie kann man den Unterschied physikalisch erklären?

III-2. Ein schwarzer dünner Spezialkunststoffschlauch (Zylinder) mit Länge 2 m, Radius 25 cm und Masse $m_B = 50\,g$ kann als Solarballon dienen, wenn bei Sonnenbestrahlung die Luft im Inneren erwärmt wird. Um aufsteigen zu können, darf der Ballon im kalten Zustand nicht mit der maximal möglichen Luftmenge gefüllt werden. Am Startort des Ballons herrschen ein Luftdruck von 970 hPa und eine Lufttemperatur von 15°C.

a. Welches Luftvolumen V_{max} darf höchstens eingefüllt werden und auf welche Temperatur muss die Luft im Inneren dann durch die Sonnenbestrahlung erwärmt werden, damit der Ballon schwebt?

b. Man nehme an, dass 90% des maximal möglichen Luftvolumens beim Start eingefüllt werden. Welche Höhe kann der Ballon erreichen.

Dichte: $\rho_0^{Luft} = 1,293\, kg\, m^{-3}$, $\rho_0^{He} = 0,1785\, kg\, m^{-3}$, $\rho_0^{H} = 0,0899\, kg\, m^{-3}$ bei Standardbedingungen $p_0 = 1013\, hPa$ und $T_0 = 0°C$.

Lösungen:

III-1a. Mit steigender Höhe wird die Luftdichte geringer. Wenn man ein konstantes Auftriebsvolumen hat, wird deshalb auch der Auftrieb geringer. Beim gezeigten Ballon ist es jedoch anders: Da der Druck im Innerer des Ballons gleich dem Außendruck ist, nimmt die Dichte des Gases im Ballon im gleichen Verhältnis ab wie der Luftdruck und das durch die Gasfüllung definierte Ballonvolumen wächst proportional zum Kehrwert des Luftdrucks. Da die Auftriebskraft proportional zum Produkt aus Ballonvolumen und äußerem Luftdruck ist, bleibt die Auftriebskraft solange konstant, bis das am Boden eingefüllte Gas das gesamte Ballonvolumen vollständig ausfüllt. Man bezeichnet diese Höhe als "Prallhöhe".

III-1b. Luftdichte am Startort: $\rho_1^{Luft} = \frac{p_1 T_0}{T_1 p_0} \rho_0^{Luft} = \frac{980 \cdot 273}{293 \cdot 1013} 1{,}293 \frac{kg}{m^3} = 1{,}165 \frac{kg}{m^3}$

Heliumdichte am Startort: $\rho_1^{He} = \frac{p_1 T_0}{T_1 p_0} \rho_0^{He} = \frac{980 \cdot 273}{293 \cdot 1013} 0{,}1785 \frac{kg}{m^3} = 0{,}1609 \frac{kg}{m^3}$

He-Volumen (schweben): $V_1^{He} = \frac{m_R + m_N}{\rho_1^{Luft} - \rho_1^{He}} = \frac{2000\ kg \cdot m^3}{(1{,}165 - 0{,}1609)\, kg} = 1991\, m^3$

III-1c. H-Volumen (schweben): $V_1^{H} = \frac{m_R + m_N}{\rho_1^{Luft} - \rho_1^{H}} = \frac{2000\ kg \cdot m^3}{(1{,}165 - 0{,}0810)\, kg} = 1845\, m^3$

Fazit: Die Dichte von Wasserstoff ist zwar nur halb so groß wie die von Helium, aber dies bewirkt nur eine Volumenersparnis von 7%.

III-1d. Beschleunigungskraft: $F_a = F_A - F_G = (45{,}51 - 25{,}92)\, kN = 19{,}59\, kN$

Beschleunigung: $a = \frac{F_a}{m_{ges}} = \frac{19{,}59 \cdot 10^3\, kg\, m}{2642\, kg\, s^2} = 7{,}41 \frac{m}{s^2}$

Fazit: Füllt man einen Ballon mit der doppelten Menge Helium, die für das Schweben am Boden benötigt wird, so wird er mit fast +g nach oben beschleunigt.

III-1e. Prallhöhe: $h_p = 7986\, m \cdot 4{,}853 = 38{,}76\, km$

III-1f. $h_o^{\max} = 7986\, m \cdot 5{,}545 = 44{,}29\, km$

III-1g. $h_g^{\max} = 7986 \cdot 5{,}4156 = 43{,}428\, km$

III-1h. Bei einem geschlossenen Ballon ist die Maximalhöhe $h_g^{\max}$ immer kleiner als die Maximalhöhe $h_o^{\max}$ bei einem offenen Ballon.

Erklärung: Die Auftriebskraft wird durch das Ballonvolumen V_B und die Dichte der äußeren Luft $\rho^{Luft}(h)$ bestimmt. Beides ist beim offenen und beim geschlossenen Ballon gleich. Unterschiedlich ist jedoch die Gewichtskraft: Der offenen Ballon kann beim Steigen Auftriebsgas ablassen und verliert deshalb Masse, während der geschlossenen Ballon seine Masse bis zur Maximalhöhe behält.

III-2a. Da $p_1 = p_2$ ist, folgt: $T_2 = T_1 \cdot \frac{\rho_1^{Luft}}{\rho_2^{Luft}} = 288\, K \cdot \frac{1{,}174}{1{,}047} = 323\, K \approx 50°C$

III-2b. Maximalhöhe: $h_{\max} = 732\, m$ mit $g = 10\, m\, s^{-2}$

Maximalhöhe mit $g = 9{,}81\, m\, s^{-2}$: $h_{\max} = 7986\, m \cdot \ln \frac{0{,}4610}{0{,}4199}$

$h_{\max} = 745\, m$ mit $g = 9{,}81\, m\, s^{-2}$

IV-1. Ein zylinderförmiger Schwimmer mit Durchmesser von $d = 50\,mm$ und einer Höhe von $h = 40\,mm$ soll aus sehr dünnem Messingblech (Dichte $\rho_{Me} = 8,6\,g cm^{-3}$) gefertigt werden. Wie dick muss das Blech sein, wenn der Schwimmer mit einem Viertel seiner Höhe aus Benzin (Dichte: $\rho_B = 0,75\,g\,cm^{-3}$) herausragen soll.?

IV-2. Eine Schwimmboje besteht aus einem Schwimmkörper in Form einer Kugel (Durchmesser: $2\,m$), auf dem ein $10\,m$ hoher Mast (Zylinder mit Durchmesser $d = 0,2\,m$) befestigt ist. Die Gesamtmasse der Boje (einschließlich Mast und Ballast des Schwimmkörpers) beträgt $4,4\,t$.

a. Im Meer ragt die Mastspitze $h_M = 8\,m$ aus dem Wasser. Welche Dichte hat das Meerwasser?

b. Die Boje wird in eine Flussmündung geschleppt. Die Mastspitze ragt nur noch $h_S = 2\,m$ aus dem Wasser. Wie groß ist die Wasserdichte jetzt?

c. Um welche Masse Ballast müsste die Boje erleichtert werden, damit der Mast auch im Süßwasser wieder 8 m aus dem Wasser ragt?

IV-3. Die vier Reifen eines PKW mit der Masse von 1200 kg seien jeweils mit einem Überdruck von 2 bar gefüllt (1 bar = 1000 hPa).

a. Wie groß ist die Kontaktfläche eines einzelnen Reifens mit der Fahrbahn?

b. Wie ändert sich die Kontaktfläche, wenn der Besitzer sein Fahrzeug mit Breitreifen (z. B. 30% größerer Breite) ausstattet und diese dann mit ebenfalls 2 bar Druck befüllt?

IV-4. Nach Angaben eines französischen Herstellers wird unter dem Namen “Aircar” ein Stadtfahrzeug mit Druckluftantrieb entwickelt. Als Antriebsmittel sollen insgesamt 95000 l Luft mit einem Druck von 30 MPa in vier Druckflaschen (Metallhohlkörper, die mit hochfestem Kevlar umwickelt sind) gespeichert werden.

a. Welches Volumen hat jede einzelne Druckflasche? Welche Masse hat die gespeicherte Luft, die bei Fahrtantritt insgesamt vom Fahrzeug mitgeführt werden muss?

b. Nehmen Sie an, dass die Druckflaschen Kugelform besitzen. Zur Abschätzung der Kräfte, die auf die Kevlarwicklung wirken, berechnen Sie Kräfte, mit der zwei Halbkugeln durch den Luftdruck auseinander getrieben werden. Bestimmen Sie zum Vergleich die Masse, deren Gewichtskraft gleich groß wäre?

c. Man nehme an, dass eine leere Druckflasche eine Masse von 40 kg habe. Bei welchem Luftinnendruck sinkt ein schwimmender Tank im Wasser nach unten?

Dichte: $\rho_0^{Luft} = 1,293\,kg\,m^{-3}$, bei Standardbedingungen $p_0 = 1013\,hPa$ und $T_0 = 0°C$.

Lösungen:

IV-1 $$x = \frac{58,89\,cm^3 \cdot 0,75}{102,1\,cm^2 \cdot 8,6} = 0,0503\,cm = 0,503\,mm$$

IV-2a. Dichte Meerwasser: $$\rho_M = \frac{m_{ges}}{V_{ges}} = \frac{4,4 \cdot 10^6\,g}{4,2516 \cdot 10^6\,cm^3} = 1,0349\,g\,cm^{-3}$$

IV-2b. Dichte Süßwasser: $$\rho_S = \frac{m_{ges}}{V_{ges}} = 0,9910\,g\,cm^{-3}$$

IV-2c. Masse des Ballastes $$m_B = \rho_S\,V_Z = 186,8\,kg$$

IV-3a. Kontaktfläche pro Rad: $$A_R = \frac{m_{PKW} \cdot g}{4 \cdot \Delta p} = 147\,cm^2$$

IV-3b. Kontaktfläche ist unabhängig von der Reifenbreite.

IV-4a. Volumen einer Druckflasche: $$V_{Fl} = \frac{1}{4} V_1 = 79,17\,l$$

Gesamtmasse der Luft: $$m_{Luft} = \rho_{Luft} \cdot V_0 = 1,293 \frac{kg}{m^3} * 95\,m^3 = 123\,kg$$

IV-4b. Kraft: $$F = p\,A_{Fl} = 30\,10^6\,\frac{N}{m^2} \cdot \frac{2229\,cm^2}{10^4\,cm^2/m^2} = 6,7\,MN$$

Auf die Kevlarwicklung wirkt eine Zugkraft, die der Gewichtskraft einer Masse von $m = \frac{F}{g} \approx 670\,t$ entspricht.

IV-4c. Lösung: $$\frac{p_i}{p_0} \leq 383$$

Innendruck der Kugel: $$p_i \leq 283 \cdot 10^3\,hPa$$

V-1. Eine Masse $m_1 = 0,5\,kg$ wird an eine Feder gehängt. In der Ruhelage mit m_1 verlängert sich die Feder im Vergleich zur unbelasteten Feder um 5 cm. Anschließend wird eine zweite Masse $m_2 = 1,0\,kg$ an die gleiche Feder gehängt, diese in die neue Ruhelage gebracht und dann um 10 cm ausgelenkt und bei $t = 0$ losgelassen. (Reibung soll vernachlässigt werden.)

a. Welche Eigenkreisfrequenz ω_0, welche Eigenfrequenz f_0 hat die Schwingung?

b. Wie groß ist die Schwingungsdauer T_0 ?

c. Welche Amplitude hat die schwingende Masse nach 100 s?

d. Wie groß ist die Geschwindigkeit nach 150 s?

V-2. Eine Feder mit der Federkonstante $D = 500\,N\,m^{-1}$ soll für einen Schwingungsversuch verwendet werden. Dazu wird die Feder senkrecht (parallel zur nach oben gerichteten y-Achse) ausgerichtet und eine Masse $m = 2\,kg$ an die noch ungespannte Feder gehängt werden, die dann zum Zeitpunkt $t = 0$ bei $y = 0$ losgelassen wird.

a. Bestimmen Sie den Wert y_0 der Ruhelage, um die herum die Masse schwingt.

b. Welche (betragsmäßig) größte Elongation $|y_{\max}|$ wird erreicht?

c. Welche Eigenkreisfrequenz ω_0 hat die Schwingung.

d. Welchen Wert hat die kleinste Amplitude $|y_{\min}|$, und nach welcher Zeit $t > 0$ wird sie erstmals erreicht?

e. Wie groß sind die Maximalwerte der Geschwindigkeit und der Beschleunigung?

Lösungen:

V-1a. Eigenfrequenz: $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 1,59\, s^{-1} = 1,6\, Hz$

V-1b. Schwingungsdauer: $T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0,628\, s$

V-1c. $y(t = 100s) = 5,62\, cm$

V-1c. Geschwindigkeit: $v(t = 150\, s) = -0,1m \cdot 10\, s^{-1} \cdot (-0,9939) = +0,994 \frac{m}{s}$

V-2a. Ausdehnung der Feder: $y_0 = \frac{F_{el}}{D} = \frac{F_g}{D} = \frac{20\, N\, m}{500\, N} = 0,04\, m = 4\, cm$

V-2b. In y-Koordinaten gilt: $y(t) + y_0 = y_0' \cos(\omega_0\, t) + y_0$

und: $y(t) = (+4\, cm)\cos(\omega_0\, t) + (-4cm)$

Die größte Elongation wird erreicht, wenn $\omega_0\, t_1 = \pi$ ist,

Es gilt: $y(t_1) = -8\, cm$

Der Betrag der größten Elongation ist also 8 cm.

V-2c. Eigenkreisfrequenz: $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{500\, N\, m^{-1}}{2\, kg}} = 15,81\, s^{-1}$

V-2d. T_0 = Schwingungsdauer $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0,397\, s$ erstmals wieder erreicht.

V-2e. Größte Beschleunigung: $a_0 = 10 \frac{m}{s^{\to 2}}$

VI-1. Gegeben sei eine Holzkugel mit Durchmesser $d = 10\,cm$ und einer Masse von $m = 0,3\,kg$. Mit der Kugel sollen verschiedene Pendel (Federpendel, Drehpendel, mathematisches Pendel und physikalisches Pendel) realisiert werden, die alle die selbe Schwingungsdauer $T_0 = 2\,s$ haben sollen.

a. Welche Federkonstante D muss eine lineare Feder besitzen, mit der die Holzkugel als Federpendel schwingt?

b. Die Holzkugel soll auf einem Drehpendel (Komponenten masselos) montiert werden, dessen Drehachse durch den Schwerpunkt der Kugel verläuft. Welche Winkelrichtgröße D^* muss die Spiralfeder des Drehpendels besitzen?

c. Man betrachte ein Fadenpendel, an der die Holzkugel hängt. Welche Pendellänge (Abstand vom Drehpunkt zum Schwerpunkt der Holzkugel) muss es haben?

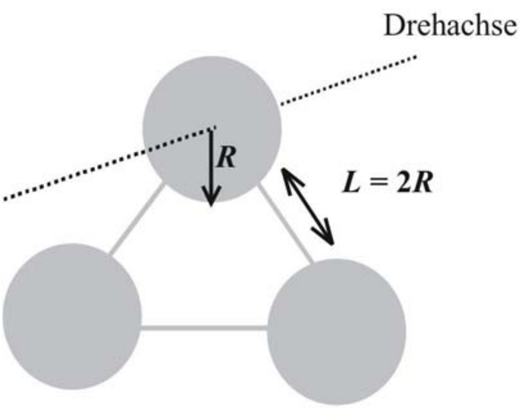
d. Man behandele das Fadenpendel als physikalisches Pendel und berechne dessen Fadenlänge in Einheiten der Fadenlänge des mathematischen Pendels.

VI-2. Es sollen unterschiedliche Pendel betrachtet werden, die eine gleiche Schwingungsdauer von $T = 1\ s$ besitzen.

a. Pendel Nr. 1: Eine Scheibe mit Radius R = 10 cm soll um einen Drehpunkt innerhalb <u>der Scheibe</u>, aber außerhalb des Schwerpunkts drehbar aufgehängt werden. Welchen Abstand hat der Drehpunkt vom Schwerpunkt?

b. Pendel Nr. 2: Das Pendel bestehe jetzt aus der schon im Teil a. genannten Scheibe mit Radius 10 cm, die in diesem Fall an einem am Rand befestigten (masselosen) Faden aufgehängt werden soll. Wie groß ist der Abstand zwischen dem Schwerpunkt der Scheibe und dem Drehpunkt am Ende des Fadens?

VI-3. Betrachten Sie ein Pendel, dass aus drei Kugeln mit gleicher Masse m_K und gleichem Radius $R = 5\,cm$ und Verbindungsstangen der Länge $L = 2\,R$ gebildet wird, die als masselos betrachtet werden sollen. Die Drehachse verlaufe durch den Schwerpunkt der oberen Kugel. Berechnen Sie:



a. das Trägheitsmoment,

b. die Eigen(kreis)frequenz ω_0 und die Schwingungsdauer T_0 für eine ungedämpfte Schwingung,

c. und die Länge l_M , die ein mathematisches Pendel mit der gleichen Schwingungsdauer hätte.

Lösungen:

VI-1a. Lösung für *D*:
$$D=\frac{4\pi^2 m}{T_0^2}=\frac{4\pi^2\cdot 0,3\,kg}{4\,s^2}=2,96\,\frac{N}{m}$$

VI-1b.
$$D^*=\frac{\frac{8}{5}\pi^2\cdot 0,3\cdot 0,05^2\,kg\,m^2}{4\,s^2}=0,003\,N\,m$$

VI-1c. Lösung für Fadenlänge:
$$l_m=\frac{T_0^2\cdot g}{4\pi^2}=\frac{4\,s^2\cdot 10\,m\,s^{-2}}{4\pi^2}=1,013\,m=101\,cm$$

VI-1d. Physikalisches Pendel:
$$l_1=l_m\left(0,5+0,497\right)=0,997\cdot l_m=100.7\,cm$$
$$l_2=l_m\left(0,5-0,497\right)=0,003\cdot l_m=0.3\,cm$$

Beim externen Drehpunkt ist die Fadenlänge (l_1) 0,3% kleiner als beim mathematischen Pendel. Bei der zweiten Lösung liegt der Drehpunkt innerhalb des Kugelvolumens, sehr dicht am Schwerpunkt.

VI-2 Lösung zur negativen Wurzel: $d_1=2{,}16\,cm$
Lösung zur positiven Wurzel: $d_2=23{,}17\,cm$

VI-2a. Der gesuchte Drehpunkt innerhalb der Scheibe entspricht Lösung $d_1=2{,}16\,cm$
VI-2b. Der gesuchte Drehpunkt außerhalb der Scheibe entspricht Lösung $d_2=23{,}17\,cm$

VI-3a. Lösung:
$$d=\frac{2}{3}h=\sqrt{\frac{48}{9}}R=2{,}309\,R=0{,}11547\,m\,.$$

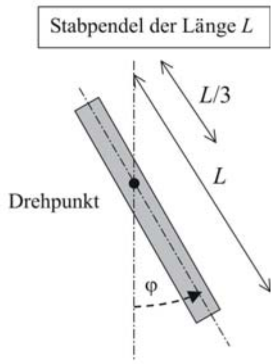
Lösung:
$$J_{ges}=J_1+J_2+J_3=33,2\,m_K\,R^2=\left(0,083\,m^2\right)\cdot m_K$$

VI-3b.
$$\omega_0=\sqrt{0,20865\cdot\frac{g}{R}}=0,45678\sqrt{\frac{g}{R}}=6.46\,s^{-1}$$

Schwingungsdauer:
$$T_0=\frac{2\pi}{w_0}=0,973\,s$$

VI-3c. Länge des Mathem. Pendels:
$$l_M=\frac{g}{\omega_0^2}=0,240\,m$$

VII-1. Für ein Stabpendel, ein homogener dünner Stab der Länge L, dessen Drehpunkt $L/3$ vom oberen Ende entfernt ist, wird eine Schwingungsdauer von 2,00 s gemessen. Das Pendel schwingt gedämpft, während jeder Schwingungsperiode verringert sich die Amplitude um 30%.



a. Bestimme die Eigen(kreis-)frequenz ω_e der gedämpften Schwingung.

b. Bestimme die Abklingkonstante β.

c. Bestimme die Eigen(kreis-)frequenz ω_0 und die Eigenfrequenz f_0 und die Schwingungsdauer T_0 der ungedämpften Schwingung.

d. Bestimme die Formel für das Massenträgheitsmoment J_{Stab} des Pendels.

e. Berechne die Pendellänge L.

f. Berechne für die Anfangsbedingungen $\varphi(t=0)=20°$ und $\dot{\varphi}(t=0)=0$ die Zeit, nach der das Amplitudenmaximum auf weniger als 1° abgeklungen ist.

VII-2. Eine Kugel mit Durchmesser 1 m und der Masse 2000 kg soll mit einem 2 m langen Seil an einer Laufkatze hängen. (Die Masse des Seils kann vernachlässigt werden.)

a. Die Laufkatze bewegt die Kugel mit $v_0 = 2\,m\,s^{-1}$. Nach dem Abstoppen der Laufkatze beginnt die Kugel zu schwingen. Berechnen Sie die anfängliche Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_{\max} = \dot{\varphi}(t=0)$ den größten Auslenkungswinkel $\varphi_{\max}$ (bei Vernachlässigung von Reibung).

b. Berechnen Sie die Eigen(kreis)frequenz ω_0 und die Schwingungsdauer T_0 (Annahme: Die Kugel besitzt eine homogene Masseverteilung).

c. Zur Dämpfung der Abbremsschwingung werden Dämpfungskomponenten verwendet, die pro Schwingung die Amplitude um 75% verringern. Wie groß ist die Abklingkonstante β? Wie groß ist die Eigen(kreis)frequenz ω_e der gedämpften Schwingung?

Lösungen:

VII-1a. Lösung: $\omega_e = \frac{2\pi}{T_e} = \frac{2\pi}{2,00\,s} = 3,142\,s^{-1}$

VII-1b. Lösung: $\beta = \frac{\ln 0,7}{-T_e} = 0,178\,s^{-1}$

VII-1c. Eigenfrequenz: $f_0 = \frac{1}{2\pi}\omega_0 = 0,501\,Hz$

Schwingungsdauer: $T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{0,501\,s^{-1}} = 1,997\,s$

VII-1d. Lösung: $J_{Stab} = \frac{1}{12}m\,L^2 + \frac{1}{36}m\,L^2 = \frac{1}{9}m\,L^2$

VII-1e. Pendellänge: $L = \frac{3\,g}{2\,\omega_0^2} = \frac{3\cdot 9,81}{2\cdot 3,147^2} = 1,49\,m$

kann man auch mit $g = 10\,m\,s^{-2}$: $L = \frac{3\,g}{2\,\omega_0^2} = \frac{3\cdot 10}{2\cdot 3,147^2} = 1,51\,m$

VII-1f. $t = \frac{\ln\frac{\varphi_{\max}(t)}{\varphi_{\max}(t=0)}}{-\beta} = \frac{\ln\frac{1}{20}}{-0,178}\,s = 16,83\,s$

VII-2a. Lösung: $\omega_{\max} = \dot{\varphi}_{\max} = \sqrt{\frac{2\,E_{kin}^{rot}}{J_{ges}}} = 0,79367\;s^{-1}$

und für den Auslenkungswinkel: $\varphi_{\max} = \arccos\left(1-\frac{h_{\max}}{d}\right) = \arccos\left(1-\frac{0,2}{2,5}\right) = 23,1°$

VII-2b. Eigen(kreis)frequenz: $\omega_0 = \sqrt{\frac{m\,g\,d}{J_{ges}}} = \sqrt{\frac{2000\cdot 10\cdot 2,5}{12700}}\,s^{-1} = 1,9842\,s^{-1}$

Schwingungsdauer: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 3,166\;s$

VII-2c. mit: $\beta \approx +\frac{\ln 4}{T_0} = 0,4379\,s^{-1}$

und: $\omega_e \approx \sqrt{\omega_0^2 - ß^2} = 1,935\;s^{-1}$

Exakte Lösung: $\beta = 0,4379\;s^{-1}\cdot 0,9765 = 0,4276\,s^{-1}$

und: $\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - ß^2} = 1,976\;s^{-1}$

VIII-1. Eine Holzkugel (ρ_{Holz} = 0,8 g cm^{-3}) mit Radius R schwingt um eine Drehachse, die den Kugelrand berührt. Die Kugel werde um 15° ausgelenkt und die anschließenden Schwingungen beobachtet: Die Schwingungsdauer beträgt 0,5 s. Die Auslenkungsamplitude nimmt nach zehn Schwingungen auf 5% der Ausgangsamplitude ab.

a. Berechnen Sie die Eigen(kreis)frequenz ω_e der gedämpften Schwingung und die Abklingkonstante β.

b. Berechnen Sie die Eigen(kreis)frequenz ω_0 und die Schwingungsdauer T_0 der ungedämpften Schwingung.

c. Wie groß ist der Radius R der Kugel, wie groß ist die Kugelmasse?

d. Wie groß ist die anfängliche Energie E_{ges} des Pendels?

e. Welchen Energieanteil verliert das Pendel pro Schwingung?

f. Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit des Pendels beim ersten Nulldurchgang?

g. Welche Schwingungsdauer würde sich ergeben, wenn das Pendel als mathematisches Pendel betrachtet würde?

VIII-2. Es sollen zwei Pendel verglichen werden: Pendel 1 besteht aus einem (dünnem) Ring der Masse m_1 mit Radius $R = 1\,m$, der an einer Stange der Masse $m_S = 0{,}5\,m_1$ und der Länge R hängt. Pendel 2 ist ähnlich, besitzt aber statt des Ringes eine homogene Scheibe gleicher Masse. Drehpunkt ist jeweils das obere Ende der Stange. (Zur Vereinfachung berücksichtige man <u>nicht</u> die Radien der Pendelstangen und des Ringes).

Bestimmen Sie für beide Pendel:

a. Den Schwerpunkt S und den Abstand d zwischen Drehpunkt A und Schwerpunkt S.

b. Die Eigen(kreis)frequenz ω_0 und die Schwingungsdauer T_0 für eine ungedämpfte Schwingung.

c. Die Länge l_R, die ein mathematisches Pendel mit der gleichen Schwingungsdauer hätte (l_R wird als reduzierte Pendellänge bezeichnet).

d. Das Pendel 2 soll jetzt um den Drehpunkt A' schwingen. A' liegt auf der Linie, die durch A und S verläuft und der Abstand zwischen den Punkten A und A' soll gleich der Länge l_R sein. Bestimmen Sie die Schwingungsdauer bezüglich des neuen Drehpunkts.

Lösungen:

VIII-1a. Abklingkonstante: $\beta = -\dfrac{\ln\dfrac{\varphi(t=10T_e)}{\varphi_0}}{10\cdot T_e} = \dfrac{\ln 20}{10\cdot T_e} = 0{,}5991\, s^{-1}$

VIII-1b. $T_0 = \dfrac{2\cdot\pi}{\omega_0} = 0{,}4994\, s$

VIII-1c. Kugelmasse: $m_{Kugel} = \rho\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3 = 307\, g$

VIII-1d. $E_{ges} = 0{,}00472\, J$

VIII-1e. Energieabnahme: $\dfrac{E(T_e)}{E_0} = \exp(-2\cdot\beta\cdot T_e) = 0{,}5493$

Energieverlust: $\dfrac{E_0 - E(T_e)}{E_0} = 45\%$

VIII-1f. Winkelgeschwindigkeit: $\dot{\varphi}\left(t = \dfrac{T_e}{4}\right) = -3{,}06 s^{-1}$

VIII-1f. Mathm. Pendel: $\omega_{0,m} = \sqrt{\dfrac{g}{l}} = \sqrt{\dfrac{g}{R}} = 14{,}89 s^{-1}$

$T_{0,m} = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 0{,}422\, s$

VIII-2a. Abstand Drehachse-Schwerpunkt: $d = \dfrac{3}{2}R = 1{,}5\, m$

VIII-2b. Eigen(kreis)frequenz (Pendel 1): $\omega_{0,1} = \sqrt{\dfrac{\frac{3}{2}m_1\, g\,\frac{3}{2}R}{\frac{31}{6}m_1 R^2}} = \sqrt{\dfrac{27\, g}{62\, R}} = 2{,}087\, s^{-1}$

Schwingungsdauer (Pendel 1): $T_{0,1} = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 3{,}011\, s$

Eigen(kreis)frequenz (Pendel 2): $\omega_{0,2} = \sqrt{\dfrac{\frac{3}{2}m_1\cdot g\cdot\frac{3}{2}R}{\frac{28}{6}m_1 R^2}} = \sqrt{\dfrac{27}{56}\dfrac{g}{R}}$

$\omega_{0,2} = 2{,}1958 s^{-1}$

Schwingungsdauer (Pendel 2): $T_{0,2} = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2{,}862\, s$

VIII-2c. Red. Pendellänge (Pendel 1): $l_{R,1} = \dfrac{g}{\omega_0^2} = 2{,}296\, m$

Red. Pendellänge (Pendel 2): $l_{0,2} = \dfrac{g}{\omega_0^2} = 2{,}074\, s^{-1}$

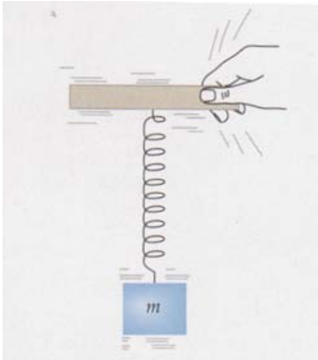
VIII-2d.

$$\omega_0' = \sqrt{0,48214\,\frac{g}{R}} = 2,1958\,s^{-1}$$

Schwingungsdauer bzgl. A':

$$T_0' = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2,862\ s$$

Reversionspendel!



IX-1. Hängt man eine Masse von 300 g an eine spezielle Feder, so verlängert sich diese um 6 cm.

a. Wie groß ist die Eigenkreisfrequenz ω_0 und die Schwingungsdauer T_0 der ungedämpften Schwingung, wenn man ein Federpendel bestehend aus einer Masse von 150 g und der oben beschriebenen Feder verwendet? (Hinweis: Verwenden Sie in diesem Fall $g = 9{,}81\,m\,s^{-2}$ und geben Sie das Ergebnis mit mindestens vier Stellen an)

b. Eine sehr genaue Messung der Schwingungsdauer ergibt den Wert von 0,3500 s. Wie groß ist die Abklingkonstante β?

c. Mit welcher Frequenz ω_R muss die Aufhängung periodisch bewegt werden, um das Resonanzmaximum zu erhalten?

d. Wie groß muss das Maximum der periodisch erregenden Kraft sein, die bei der Resonanzfrequenz ω_R eine Resonanzamplitude von 25 cm erzeugt??

e. Wie muss eine homogene dünne Stange der Länge $L = 5{,}2\,cm$ aufgehängt werden, damit sie als Schwerependel die gleiche Schwingungsdauer wie das Federpendel hat?

IX-2. Ein Drehpendel besteht aus einer Spiralfeder mit der Winkelrichtgröße $D^* = 0{,}12\,N\,m$ und einer zylindrischen Scheibe der Masse $m_S = 0{,}5\,kg$ mit Radius $R_s = 0{,}15\,m$. Es wird durch das äußere Drehmoment $M(t) = (0{,}2Nm)\cdot\sin(\omega_a t)$ angeregt und durch die äußere (Kreis-)Frequenz $\omega_a = \omega_R = 3\,s^{-1}$ zur Resonanz gebracht.

a. Wie groß ist die Eigen(kreis-)frequenz ω_0 der ungedämpften Schwingung und wie groß ist die Abklingkonstante β?

b. Wie groß ist das Amplitudenmaximum bei der Resonanzbedingung?

IX-3. Beschreiben Sie erzwungene Schwingungen für unterschiedliche Dämpfungen:

a. Skizzieren Sie Resonanzkurven für vier Abklingkonstanten β mit $0 \le \beta \le \left(1/\sqrt{2}\right)\omega_0$

b. Was passiert, wenn die Abklingkonstante $\beta = \left(1/\sqrt{2}\right)\omega_0$ ist? Begründung!

c. Skizzieren Sie den Winkel δ der Phasenverschiebung als Funktion von ω_a/ω_0.

Lösungen:

IX-1a. Federkonstante: $D = \frac{\Delta F}{\Delta s} = \frac{0,3\,kg \cdot 9,81\,m}{0,06\,m\,s^2} = 49,05\ N\,m^{-1}$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{49,05\,kg\,m}{0,15\,s^2\,kg\,m}} = 18,0831\,s^{-1}$

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0,347461\,s$

IX-1b. $\beta = \sqrt{18,0831^2 - 17,9520^2}\ s^{-1} = 2,1735\,s^{-1}$

IX-1c. Resonanzfrequenz: $\omega_R = 17,8199\,s^{-1}$

Schwingungsdauer des Erregers: $T_R = \frac{2\pi}{\omega_R} = 0,3526\,s$

IX-1d. $F_{Err}^{\max} = 2,93\ N$

IX-1e. Lösung: $d = 0,015\,m = 1,5\,cm$

IX-2a. Abklingkonstante: $ß = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\omega_0^2 - \omega_R^2\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(4,619^2 - 3^2\right)} = 2,483\,s^{-1}$

IX-2b. Lösung: $\varphi_{\max}\left(\omega_a = \omega_R, \omega_e, \beta\right) = \frac{35,55\,s^{-2}}{2 \cdot 2,483 \cdot 3,895\,s^{-2}} = 1,838 = 105,3°$

IX-3a. Siehe Vorlesung

IX-3b. Die Resonanzfrequenz ist also bei $\omega_a = \omega_R = 0$, d. h. es gibt keine Amplitudenüberhöhung.

IX-3c. siehe Vorlesung

X1. Die Federung eines kleinen LKWs soll so ausgelegt sein, dass sich das Fahrzeug bei voller Zuladung von 1000 kg um 10 cm senkt (Annahme: Alle vier Räder besitzen gleiche Dämpfung und werden bei der Beladung gleich belastet). Die Räder besitzen eine Masse von $m_R = 50\,kg$ und sollen so bedämpft sein, dass sie im aperiodischen Grenzfall schwingen.

a. Bestimmen Sie die Federkonstante und die Abklingkonstante.

b. Beim Überfahren eines Hindernisses schwingt eines der Räder 8 cm aus. Wie groß ist der entsprechende Kraftstoß, der auf diese Rad wirkt?

c. Mit welcher Amplitude würde das Rad bei gleichem Kraftstoß ausschwingen, wenn die Abklingkonstante nur 50% des Wertes für den aperiodischen Grenzfall hätte?

d. Auf einer Straße sollen Bodenwellen in regelmäßigen Abständen von $l = 0,75\,m$ vorhanden sein. Nehmen Sie an, dass die Räder den Bodenwellen folgen und die Restmasse des Fahrzeugs ein Federpendel mit der Masse $m_S = m_{ges} - 4 \cdot m_R$ und der aus den vier Radfedern gebildeten Gesamtfederkonstante darstellen. Bei welcher Geschwindigkeit sind die vertikalen Schwingungen des unbeladenen LKW ($m_{ges} = 1700\,kg$) am größten?

e. Berechnen Sie die Resonanzüberhöhung.

Lösungen:

XI-1a. Eigenkreisfrequenz: $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{25\,kN/m}{50\,kg}} = \sqrt{500}\;s^{-1} = 22,36\;s^{-1}$

Im aperiodischen Grenzfall gilt: $\beta = \omega_0 = 22,36\;s^{-1}$

XI-1b. Kraftstoß = Impulsänderung: $\overline{F}\cdot\Delta t = \int F dt = \Delta p = 243\,N\,s$

XI-1c. Lösung: $x(T_{\max}) = 0,25098\,m\cdot 0,546297\cdot 0,866019 = 0,1187\,m = 11,9\,cm$

XI-1d. Eigenkreisfrequenz: $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{100\,kN/m}{1500\,kg}} = 8,16\,s^{-1}$

Es folgt: $b_1 = \beta\cdot 2\,m_R = 22,36\cdot 2\cdot 50\frac{kg}{s} = 2236\frac{kg}{s}$

$$b_{ges} = 8944\frac{kg}{s}$$

$$\beta = \frac{b_{ges}}{2\cdot m_S} = \frac{8944}{2\cdot 1500}s^{-1} = 2,98\;s^{-1}$$

$$\omega_R = \sqrt{8,16^2 - 2\cdot 2,98^2}\,s^{-1} = 6,99\,s^{-1}$$

$$\omega_e = \sqrt{8,16^2 - 2,98^2}\,s^{-1} = 7,59\,s^{-1}$$

mit Abstand $l = 0,75\,m$: $v_R = \frac{l}{T_R} = \frac{0,75m}{0,899\,s} = 0,834\frac{m}{s} = 3,0\frac{km}{h}$

XI-1d. $\frac{x_R^{\max}}{x_0} = \frac{\omega_0^2}{2\,\beta\,\omega_e} = \frac{8,16^2}{2\cdot 2,98\cdot 7,59} = 1,47$