



Physik II

**Vorlesung an der Fachhochschule
Hannover im Fachbereich
Maschinenbau**

Ulrich J. Schrewe

Status: April 2002

Physik II



Inhalt

1. Mechanik deformierbarer Körper	4
2. Schwingungen	111
2a. <i>Ungedämpfte Schwingungen</i>	111
2b. <i>Gedämpfte Schwingungen</i>	147
2c. <i>Geschwindigkeitsunabhängige Dämpfung</i>	186
2d. <i>Erzwungene Schwingungen</i>	195
2e. <i>Gekoppelte Schwingungen</i>	222
3. Wellen	273
4. Akustik	319
5. Anhang	357

Hinweis



- Das Unterrichtsmaterials ist über das INTERNET zugänglich:
- www.stud.fh-hannover.de/~schrewe
- ZIP-Dateien mit HTML-Files und den Pack&Go Power Point Präsentation finden Sie unter:
- [VOL1/DOCS/MBAU/SCHREWE/...](#)
- Fragen (jederzeit) auch per e-mail:
- ulrich.schrewe@mbau.fh-hannover.de

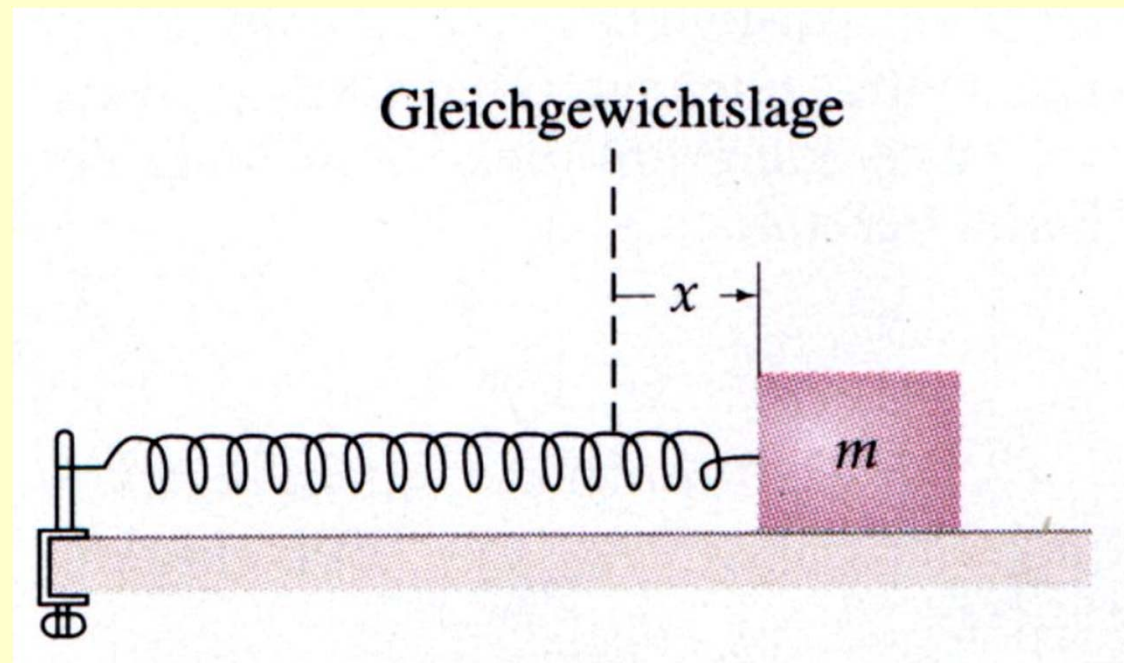
2. Schwingungen

2a. *Ungedämpfte Schwingungen*

Harmonische Schwingung



- Auslenkung aus einer Gleichgewichtslage führt oft zu einer periodischen Schwingung.
- Die Auslenkung der Feder erzeugt eine Rückstellkraft:
- $F_x = -D \cdot x$
- Kraft erzeugt Beschleunigung:
- $F_x = -D \cdot x = m \cdot a$



Harmonische Schwingung



- Umformung: $\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{D}{m} \cdot x = \ddot{x} + \frac{D}{m} \cdot x = 0$

- Lösungsansatz: $x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \delta)$

- 1. Ableitung: $\dot{x}(t) = A \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \delta)$

- 2. Ableitung: $\ddot{x}(t) = -A \cdot \omega_0^2 \cdot \sin(\omega_0 t + \delta)$

$$\ddot{x}(t) + \left(\frac{D}{m}\right) \cdot x = -\cancel{A} \cdot \omega_0^2 \cdot \cancel{\sin(\omega_0 t + \delta)} + \cancel{A} \cdot \left(\frac{D}{m}\right) \cancel{\sin(\omega_0 t + \delta)}$$

Harmonische Schwingung



- **Lösung:** $\ddot{x}(t) + \left(\frac{D}{m}\right) \cdot x = -\omega_0^2 + \left(\frac{D}{m}\right) = 0$

- **Kreisfrequenz:** $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$

- **Frequenz:** $f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{D}{m}}$

- **Schwingungsdauer:** $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$

- **Phase:** δ **und Amplitude:** A

Anfangsbedingungen



- Die Kreisfrequenz ergibt sich aus der Federkonstanten D und der Masse m :

$$\omega_0 = \sqrt{D/m}$$

- Die Phase δ (Phasenkonstante) wird durch die Anfangsbedingung festgelegt:

$$x(t=0) = A \cdot \sin(\delta) \quad \delta = \arcsin(x(t=0)/A)$$

- Beispiel:** Zur Vereinfachung wählt man häufig die Anfangsbedingung:

- $x(t=0) = 0$ und $\delta = 0$

Anfangsbedingungen



- Wählt man als Anfangsbedingung: $x(t = 0) = x_0$
- so folgt: $\delta = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$
- Lösung: $x(t) = x_0 \cdot \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = x_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$
- 1. Ableitung: $\dot{x}(t) = -x_0 \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t)$
- 2. Ableitung: $\ddot{x}(t) = -x_0 \omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 t)$

Darstellung

- **Auslenkung:** $\longrightarrow$

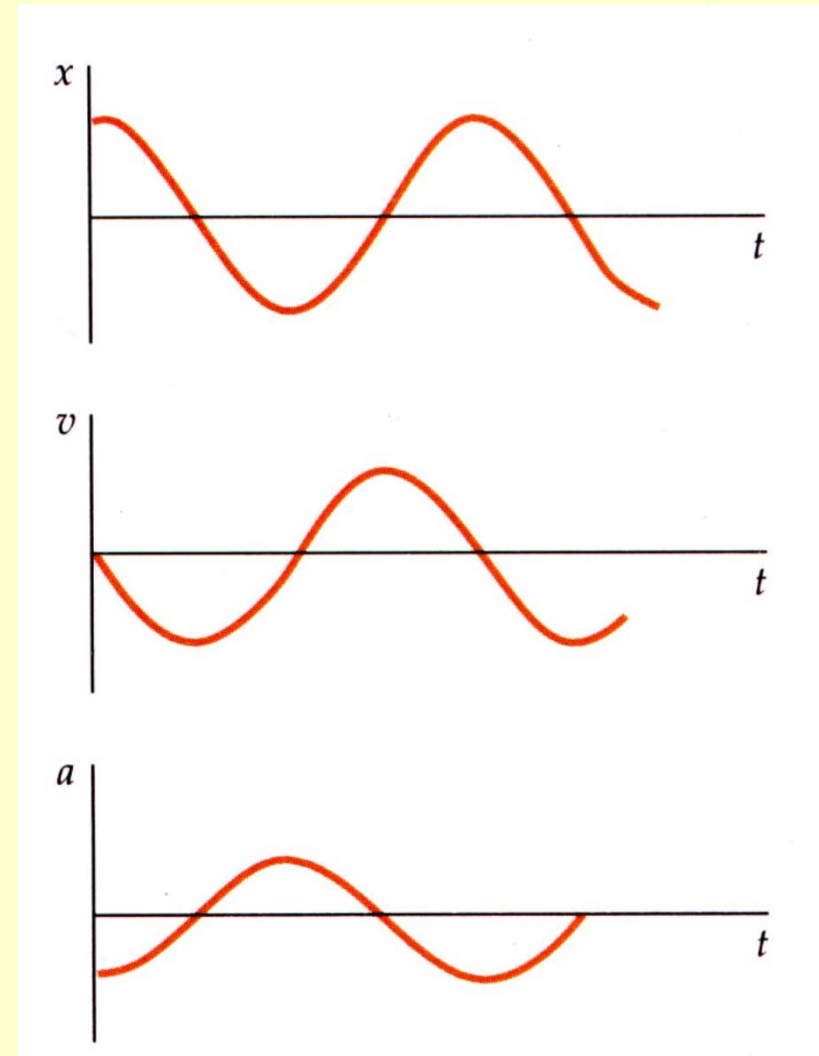
$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$$

- **Geschwindigkeit:** $\longrightarrow$

$$\dot{x}(t) = -x_0 \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t)$$

- **Beschleunigung:** $\longrightarrow$

$$\ddot{x}(t) = -x_0 \omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 t)$$



Ergänzung: Komplexe Zahlen



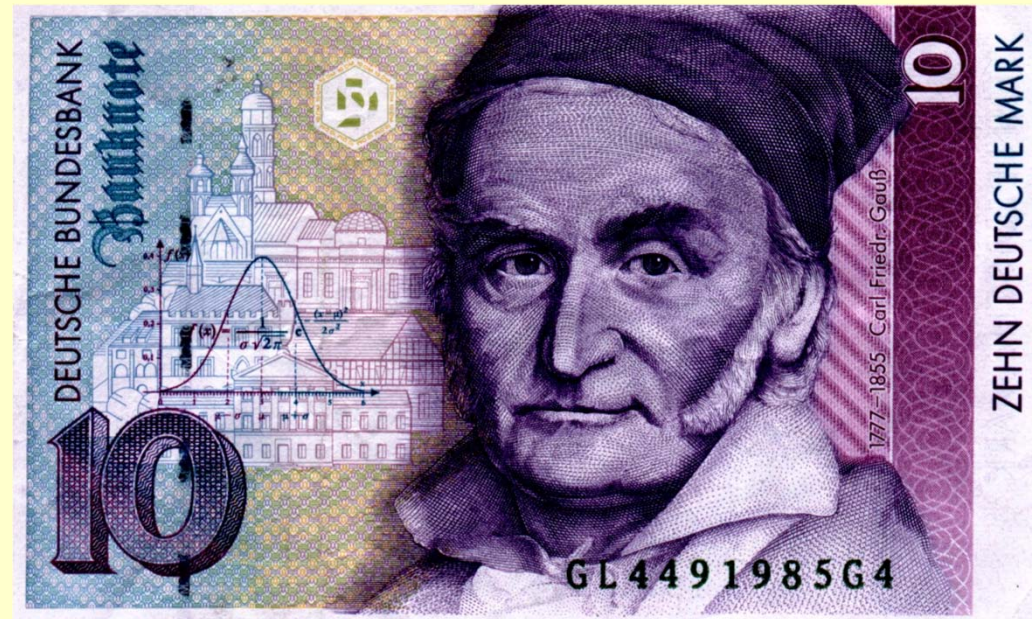
- Die Gleichung $x^2 = -1$ kann durch eine *reelle Zahl* nicht gelöst werden.
- *Euler* (1707 – 1783) führte zur Lösung dieser Gleichung die *imaginäre Einheit* i ein:
 - $i^2 = -1$
- Eine *komplexe Zahl* ist eine Kombination aus reellen und imaginären Zahlen:
 - $x + iy$

Komplexe Zahlenebenen



- Nach *Gauß* (1831) können die komplexen Zahlen $x + i y$ als Punkte einer Ebenen, die durch die kartesischen Koordinaten (x, iy) gebildet wird, gedeutet werden.

- Reelle Achse x
- Einheit: 1
- Imaginäre Achse iy
- Einheit: i





Eulersche Gleichung

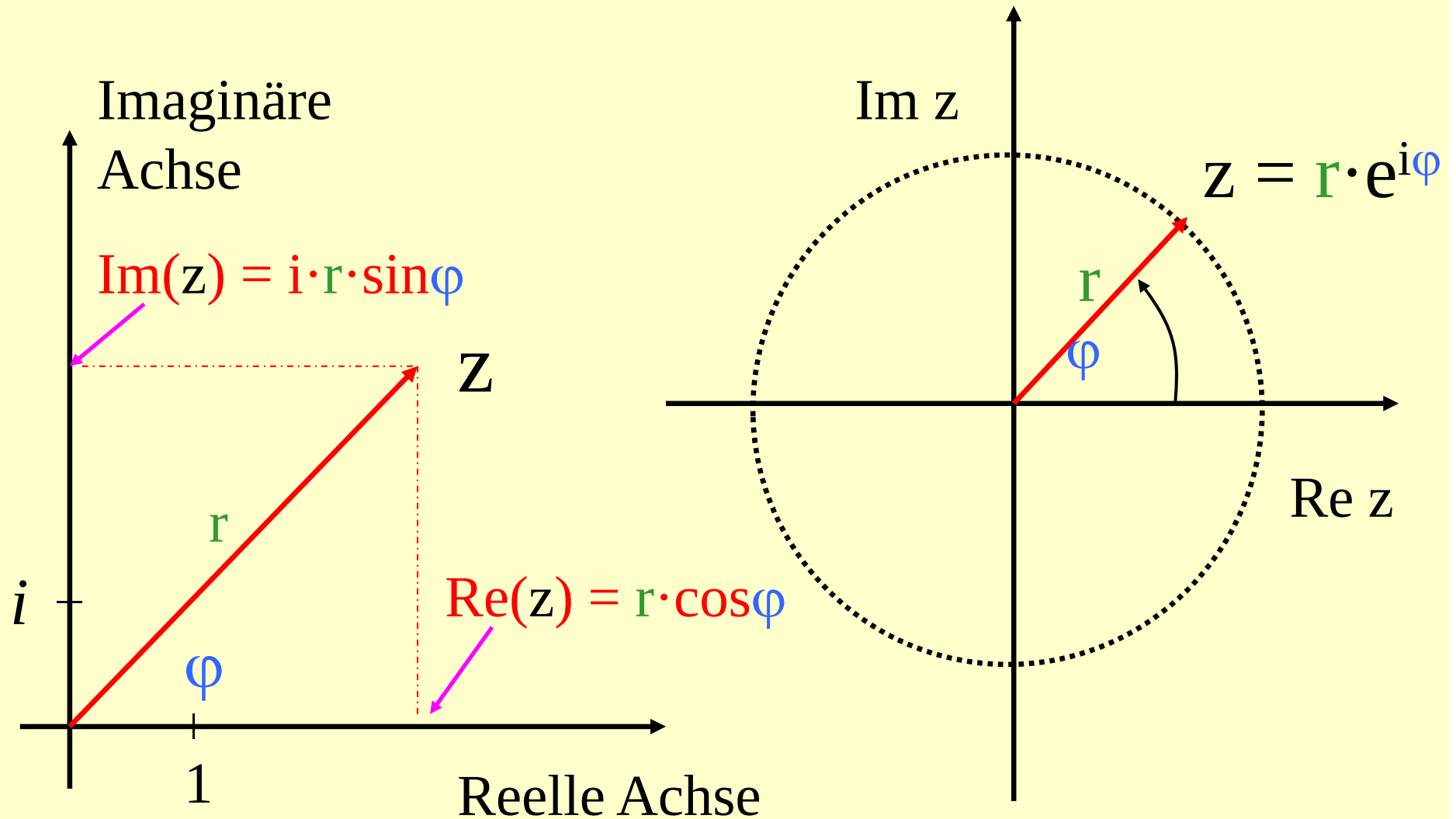
- Die *Eulersche Gleichung* verknüpft die Exponentialfunktion mit den trigonometrischen Funktionen:

$$e^{i \cdot \varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$$

- wobei φ eine **reelle Zahlen** ist.
- Mit komplexen Zahlen und der Eulerschen Gleichung können viele mathematische Probleme sehr einfach gelöst werden.

Komplexe Zahlenebene

-|-|



Allgemeine Darstellung



- Jede komplexe Zahl $z = x + i \cdot y$ kann in der Form

$$z = x + i \cdot y = r \cdot e^{i \cdot \varphi} = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

- dargestellt werden.
- **Vorteil:** *Trigonometrische Funktion* können durch *Exponentialfunktionen* ersetzt werden. Die Verwendung von Additionstheoreme für sin und cos wird dadurch vermieden. Lösungen von Differentialgleichungen werden vereinfacht.

Rechenregeln für $z = x + i \cdot y$



- Addition und Subtraktion:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + i \cdot y_1) \pm (x_2 + i \cdot y_2) = (x_1 + x_2) \pm i \cdot (y_1 + y_2)$$

- Multiplikation und Division:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 + i \cdot y_2) = \\ &= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) \pm i \cdot (x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2) \end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{y_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Rechenregeln für $z = r \cdot e^{i\varphi}$



- Multiplikation und Division:

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot e^{i\varphi_1}) \cdot (r_2 \cdot e^{i\varphi_2}) = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot e^{i\varphi_1}}{r_2 \cdot e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

- Spezielle Werte: $e^{i \cdot 2k\pi} = -\left(e^{i \cdot (2k+1)\pi}\right) = 1$

$$e^{i \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi} = i \quad e^{i \cdot \frac{3}{2} \cdot \pi} = -i$$

- Diese Rechenregeln sind deutlich einfacher.

Anwendung: Schwingungen



- **Reelle Gleichung** für Schwingungen:

$$x(t) = x_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \delta)$$

- **Komplexe Gleichung** für Schwingungen:

$$z(t) = z_0 \cdot e^{i \cdot (\omega_0 \cdot t + \delta)}$$

- **1. Ableitung:** $z(t) = i \omega_0 z_0 \cdot e^{i \cdot (\omega_0 \cdot t + \delta)}$

- **2. Ableitung:** $z(t) = -\omega_0^2 z_0 \cdot e^{i \cdot (\omega_0 \cdot t + \delta)}$

Schwingungsgleichung

- Für komplexe Auslenkungen $z(t)$ gilt:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{D}{m} \cdot z = \ddot{z} + \frac{D}{m} \cdot z = 0$$

- Lösungsansatz: $z(t) = z_0 \cdot e^{i \cdot (\omega_0 t + \delta)}$

$$-\omega_0^2 \cdot z_0 \cdot e^{i \cdot (\omega_0 t + \delta)} + \frac{D}{m} \cdot z_0 \cdot e^{i \cdot (\omega_0 t + \delta)} = 0$$

$$\left(-\omega_0^2 + \frac{D}{m} \right) \cdot z_0 \cdot e^{i \cdot (\omega_0 t + \delta)} = 0 \quad \left(-\omega_0^2 + \frac{D}{m} \right) = 0$$

Drehschwingungen



- Bei einem Drehpendel erzeugt die Winkelauslenkung ε ein Drehmoment $M = -D^* \cdot \varepsilon$
- (Zur Unterscheidung vom Phasenwinkel φ verwenden wir hier für die Winkelauslenkung den Buchstaben ε)
- Das Drehmoment ist gleich dem Produkt aus Trägheitsmoment und Winkelbeschleunigung:

$$J \cdot \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} = -D^* \cdot \varepsilon \Rightarrow \ddot{\varepsilon} + \frac{D^*}{J} \cdot \varepsilon = 0$$

- **Lösung:** $\omega_0 = \sqrt{\frac{D^*}{J}}$

Translation/Rotation



	Translation	Rotation
Schwingungs- größe	Auslenkung x	Winkel ε
Trägheitsgröße	Masse m	Massenträgheits- moment J
Richtgröße	Federkonst. D	Winkelrichtgröße D^*
Trägheitskraft/ -moment	$F_T = m \cdot a$	$M_T = J \cdot \alpha$
Rückstellkraft/ -moment	$F_R = -D \cdot x$	$M_R = -D^* \cdot \varepsilon$

Translation/Rotation

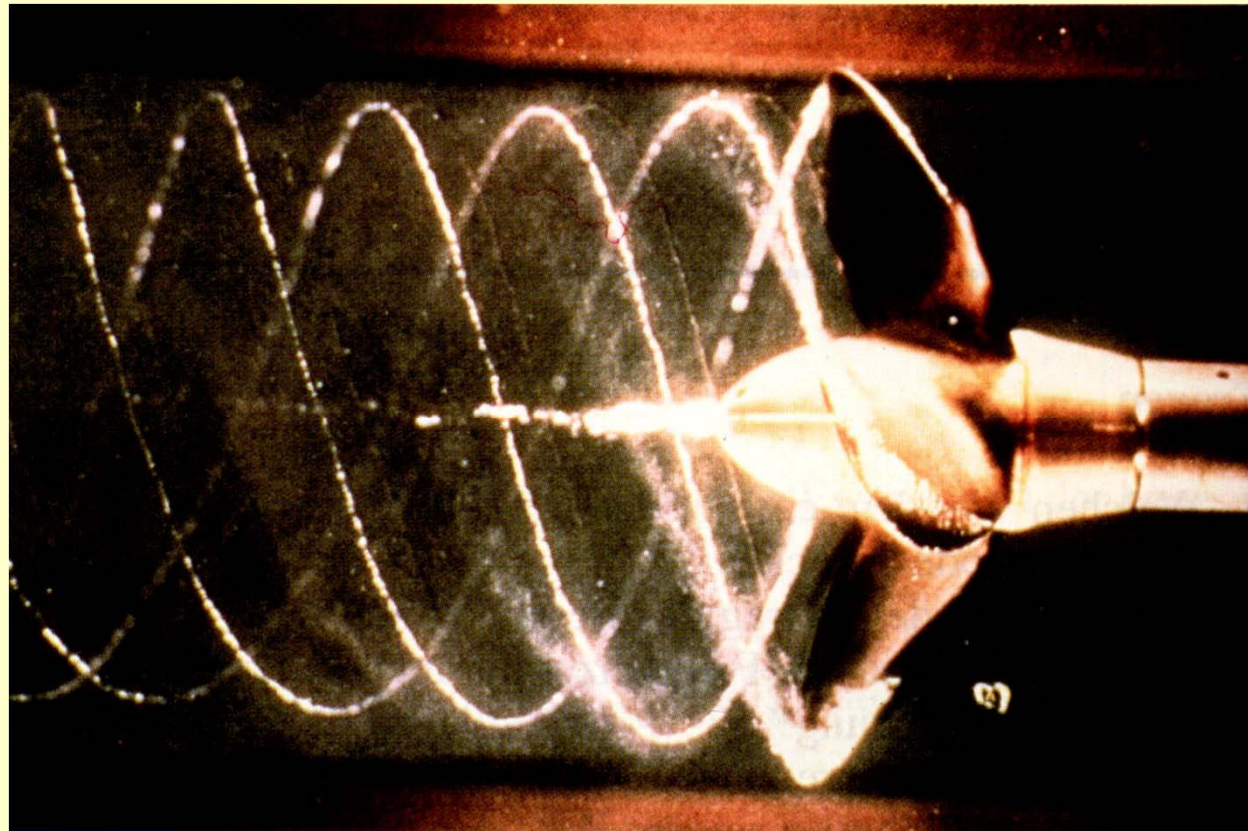


	Translation	Rotation
Kreisfrequenz	$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{D^*}{J}}$
Frequenz	$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{D}{m}}$	$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{D^*}{J}}$
Schwingungsdauer	$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$	$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{D^*}}$

Kreisbewegungen



- *Kreisbewegungen* erscheinen in der Projektion als *harmonische Schwingung*.



Zusammenfassung



- Wirken bei der Auslenkung eines Körpers *rückstellende Kräfte*, so kann der Körper *schwingen*.
- Wenn die *Rückstellkräfte* proportional zur Auslenkung sind, so erhält man *Sinus-Schwingungen (Harmonischer Oszillator)*.
- Frequenz ω_0 (oder f) und Schwingungsdauer T werden durch das Verhältnis von Rückstell- (D oder D^*) und Trägheitsgrößen (m oder J) bestimmt.
 ω_0 , f und T sind unabhängig von der Amplitude.

Schwingungsenergie



- Sowohl die *kinetische* als auch die *potentielle Energie* ändern sich zeitlich:

- $E_{kin} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ und $\dot{x}(t) = -x_0 \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m x_0^2 \omega_0^2 \cdot \sin^2(\omega_0 t)$$

- $E_{pot} = \frac{1}{2} D x^2$ und $x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$

$$E_{pot} = \frac{1}{2} D \cdot x_0^2 \cdot \cos^2(\omega_0 t)$$

Schwingungsenergie



- Beide, die *kinetische Energie* und die *potentielle Energie* durchlaufen Werte zwischen Null einem Maximum. Beide Energien hängen vom Wert der Maximalamplitude x_0 ab.
- Die *kinetische Energie* hängt auch von der Schwingungsfrequenz ab.
- Die *kinetische Energie* erreicht ein Maximum, wenn die *potentielle Energie* Null ist (dies gilt auch umgekehrt).

Summe $E_{\text{ges}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$



- *Gesamtenergie:*

$$\begin{aligned} E_{\text{ges}} &= E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \\ &= \frac{1}{2} m x_0^2 \omega_0^2 \cdot \sin^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2} D x_0^2 \cdot \cos^2(\omega_0 t) = \\ &= \frac{1}{2} m x_0^2 \frac{D}{m} \cdot \sin^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2} D x_0^2 \cos^2(\omega_0 t) = \\ &= \frac{1}{2} D x_0^2 \cdot (\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)) = \\ &= \frac{1}{2} D x_0^2 = \text{const.} \end{aligned}$$



Gesamtenergie

- Die *Gesamtenergie* einer Schwingung ist gleich der potentiellen Energie, die zu Beginn (d. h. zum Beispiel bei der Auslenkung auf die maximale Amplitude x_0) in das System gesteckt worden ist.
- Bei der Schwingung wird kontinuierlich **kinetische Energie in potentielle umgewandelt**, und umgekehrt.
- Bei *fehlender Reibung* bleibt die Gesamtenergie konstant. Die Schwingung ist *ungedämpft*.



Energiemittelwerte

- *Potentielle* und *kinetische Energien* ändern sich periodisch mit zeitlicher Versetzung:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} D x_0^2 \sin^2(\omega_0 t) = E_{ges} \sin^2(\omega_0 t)$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2} D x_0^2 \cos^2(\omega_0 t) = E_{ges} \cos^2(\omega_0 t)$$

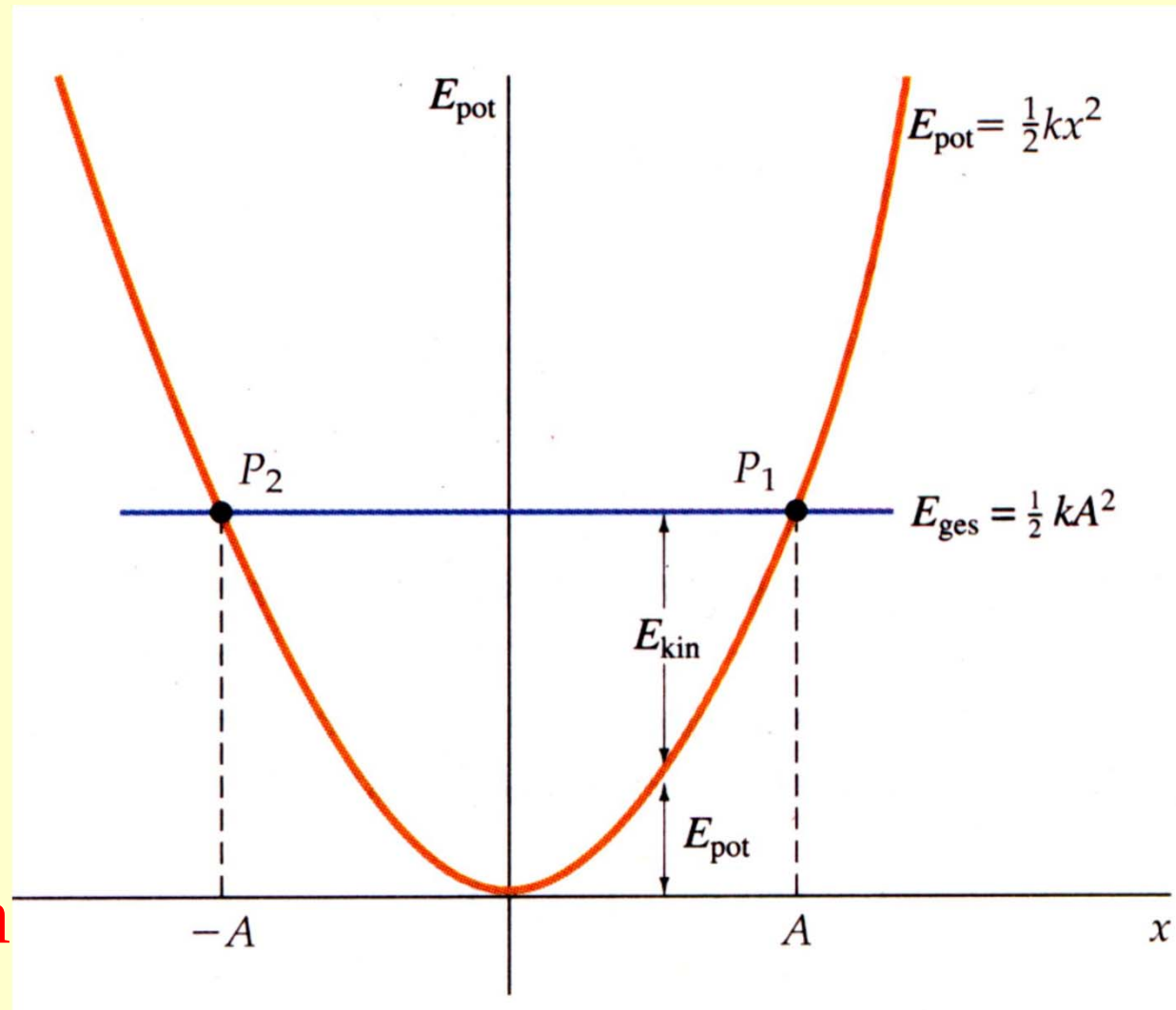
- **Ferner ist:** $E_{kin} + E_{pot} = E_{ges}$
- Für die **Mittelwerte** gilt deshalb:

$$\langle E_{kin} \rangle = \langle E_{pot} \rangle = \frac{1}{2} E_{ges}$$

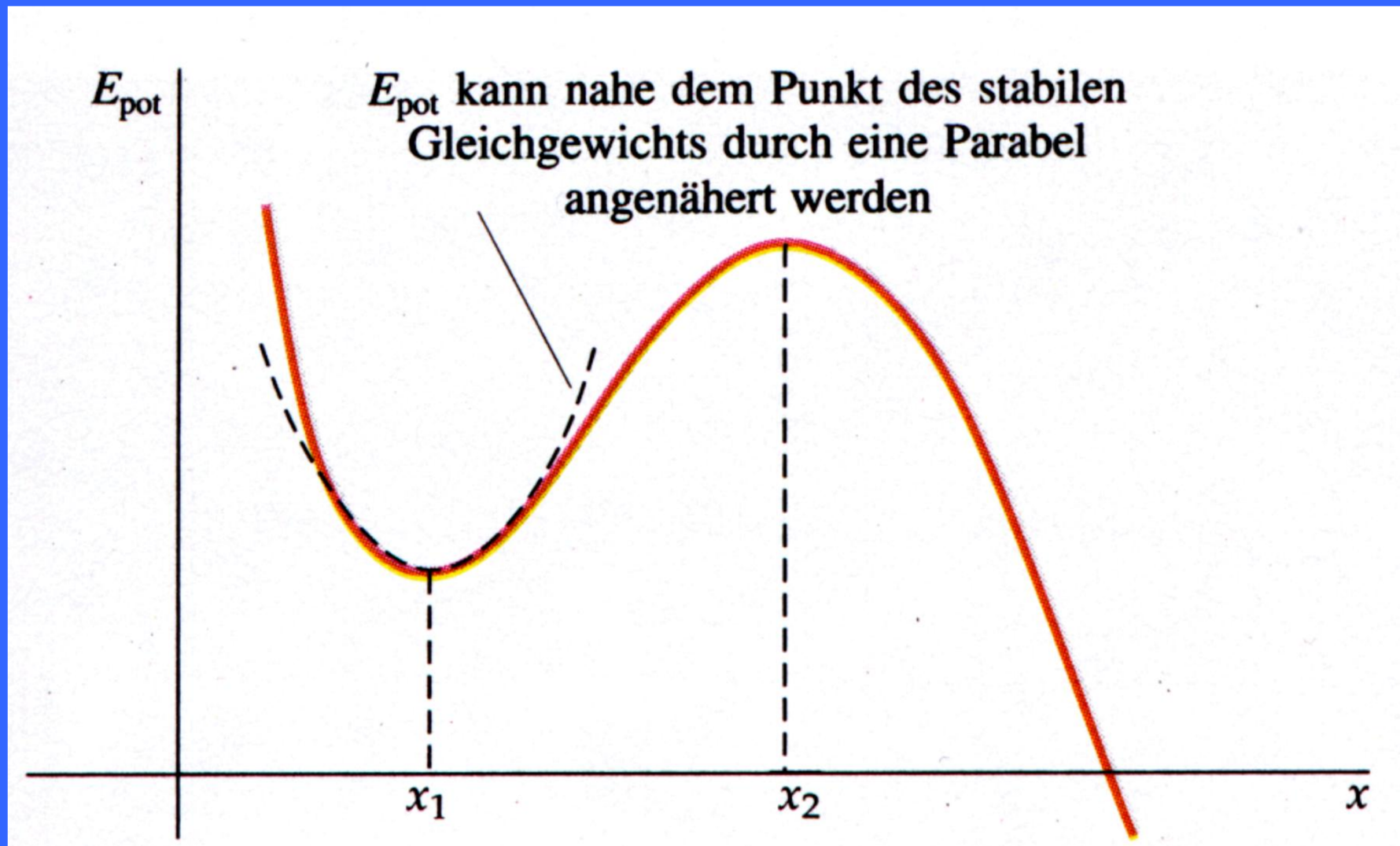
Potentialdarstellung



- *Potentielle Energie des harmonischen Oszillators* als Funktion der Amplitude.
- „*Potentialtopf*“ hat Parabelform



Gleichgewichtsschwingungen



Gleichgewichtsschwingungen

- Ein System ist in einem Punkt im Gleichgewicht, wenn die zugehörige *potentielle Energie* ein *Minimum* besitzt.
- Bei kleinen Auslenkungen aus dieser Gleichgewichtslage kann das Potential im allgemeinen durch eine *Parabel* angenähert werden.
- Kleine Auslenkungen aus einer Gleichgewichtslage bewirken deshalb im allgemeinen:

harmonischen Schwingungen

Verallgemeinerung

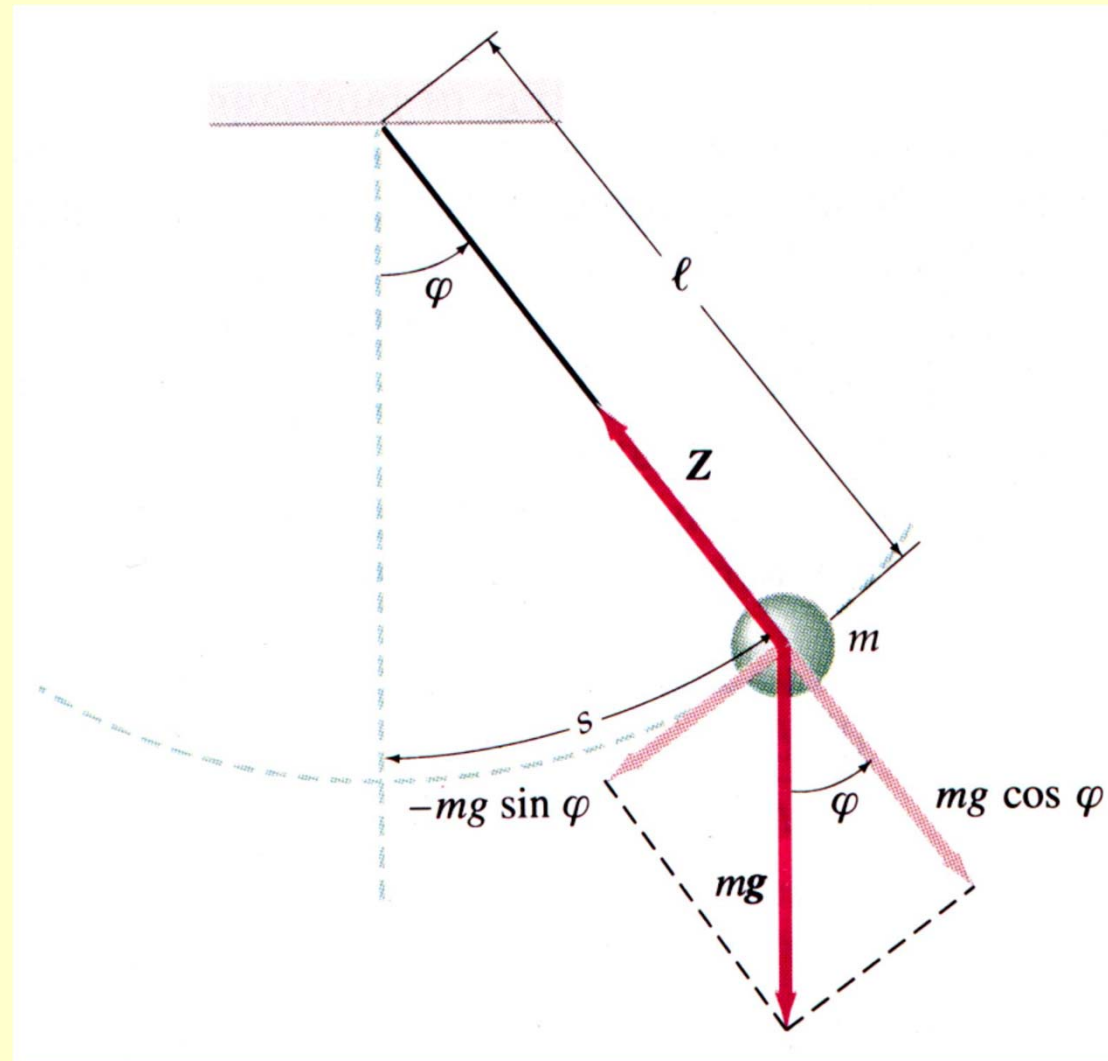


- Obwohl die **Schwingungsgleichungen** für ein spezielles System mit einer mechanischen elastischen Rückstellkraft hergeleitet wurden, ist die **Anwendung universell**.
- Bei allen Systemen mit **annähernd linearem Kraftgesetz** bzw. annähernd parabelförmigen Potentialtöpfen treten ähnliche Schwingungszustände auf (*harmonische Schwingungen*).
- **Beispiele:** in Flüssigkeiten, in Gasen, im Gravitationsfeld, in elektrischen und magnetischen Feldern, Atomphysik, Kernphysik....

Mathematisches Pendel



- Eine „*punkt-förmige*“ Masse m hänge an einem „*masselosen*“ Faden der Länge l und schwinge mit „*kleiner Amplitude*“.



Mathematisches Pendel



- Rückstellkraft: $F_R = -m g \cdot \sin \varphi$
- Trägheitskraft: $F_{Tr} = m \ddot{s}$
- Differentialgleichung: $\ddot{s} + g \cdot \sin \varphi = 0$
- Winkel: $\varphi = s/l$ $\ddot{s} + g \cdot \sin \frac{s}{l} = 0$
- Bei „*kleinen Amplituden*“ gilt: $\sin \frac{s}{l} \approx \frac{s}{l}$

Mathematisches Pendel



- **Differentialgleichung:** $\ddot{s} + \frac{g}{l} s = 0$

- **Lösungen:**

- **Kreisfrequenz:** $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

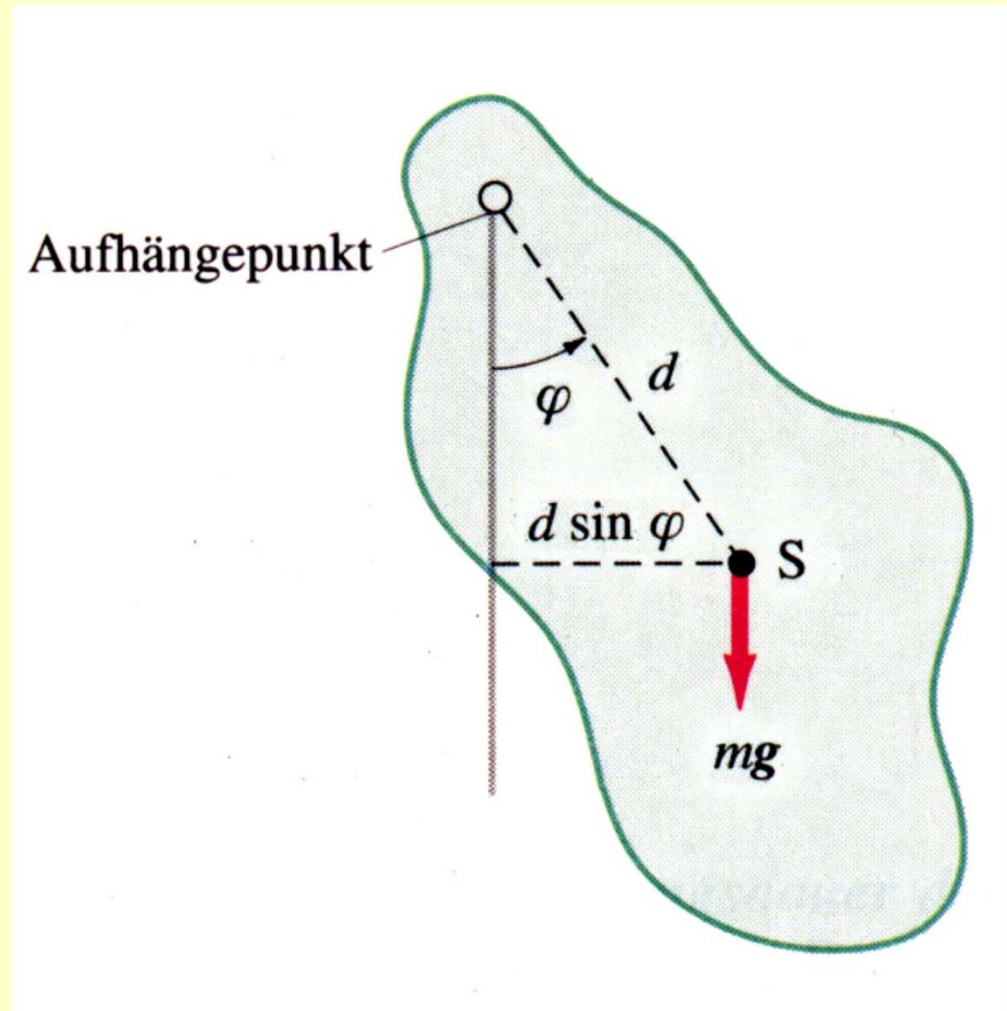
- **Frequenz:** $f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}$

- **Schwingungsdauer:** $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$

Physikalisches Pendel



- Ein starrer Körper mit *Massenträgheitsmoment* J werde außerhalb des Schwerpunktes (Abstand d) aufgehängt.



Physikalisches Pendel



- Rückstelldrehmoment: $M_R = -m g d \cdot \sin \varphi$
- Trägheitsdrehmoment: $M_{Tr} = J \ddot{\varphi}$
- **Differentialgleichung:** $\ddot{\varphi} + \frac{m g d}{J} \cdot \sin \varphi = 0$
- Bei „*kleinen Auslenkungen*“ gilt: $\sin \varphi \approx \varphi$

Physikalisches Pendel



- **Differentialgleichung:** $\ddot{\varphi} + \frac{m g d}{J} \varphi = 0$

- **Lösungen:**

- **Kreisfrequenz:** $\omega = \sqrt{\frac{m g d}{J}}$

- **Frequenz:** $f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{m g d}{J}}$

- **Schwingungsdauer:** $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{m g d}}$

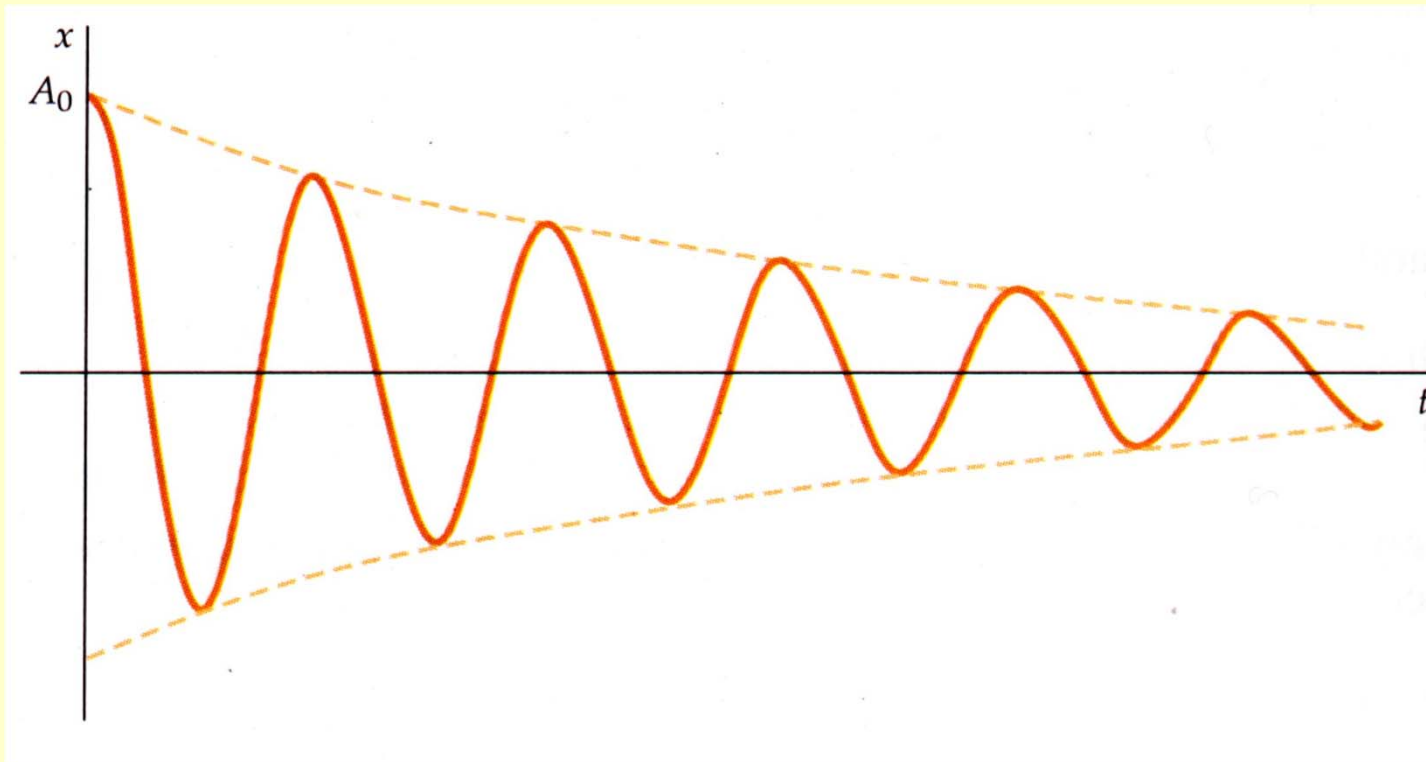
2. Schwingungen

2b. *Gedämpfte Schwingungen*

Gedämpfte Schwingungen



- Die Erfahrung zeigt, dass ohne Energiezufuhr die Schwingungsamplituden immer mit der Zeit abnehmen.



Gedämpfte Schwingungen



- Die Ursache für die Amplitudenabnahme sind ***Reibungsverluste***: Dem schwingenden System wird Schwingungsenergie entzogen, die dann in z. B. in Wärme umgewandelt wird und dem System nicht mehr zur Verfügung steht.
- Es gibt ***geschwindigkeitsunabhängige Reibungskräfte***, z. B. die Gleitreibung, Rollreibung, Lagerreibung etc.

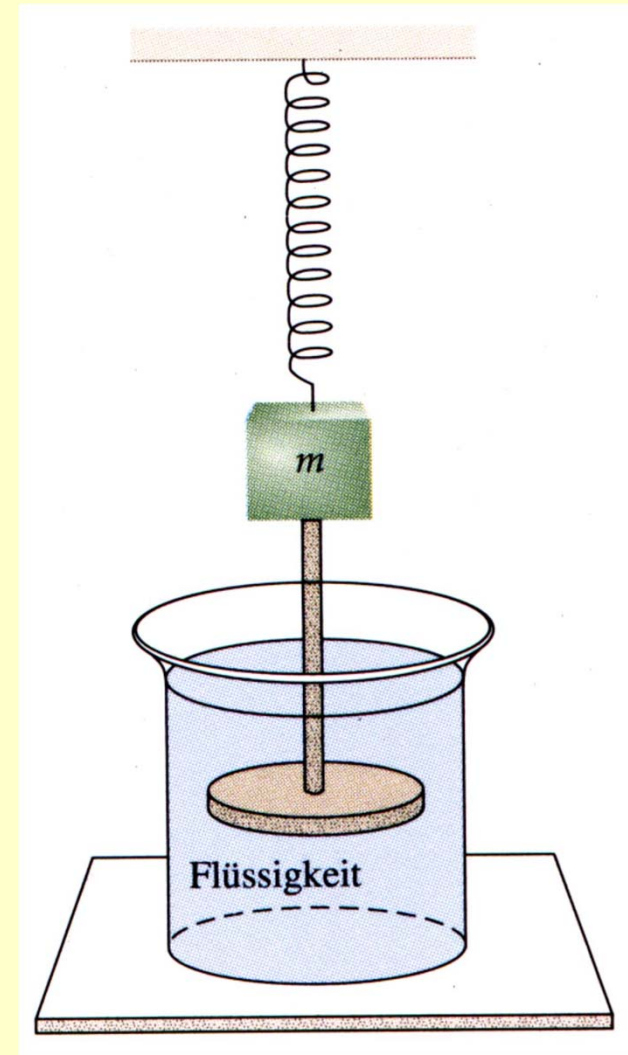
$$F_R = \mu \cdot F_N$$

Gedämpfte Schwingungen



- **Versuch:** Taucht ein an einem Federpendel befestigter Kolben in eine Flüssigkeit, so wird die Schwingung gedämpft.
- *In diesem Fall ist die Reibungskraft F_R in guter Näherung proportional zur Geschwindigkeit v :*

$$F_R = -b \cdot v$$



Gedämpfte Schwingungen



- Reibungskraft $\vec{F}_{\text{Re}}$ und Rückstellkraft $\vec{F}_{\text{Rü}}$ wirken beide entgegengesetzt zur Trägheitskraft $\vec{F}_{\text{Tr}}$:

$$\vec{F}_{\text{Rü}} + \vec{F}_{\text{Re}} = \vec{F}_{\text{Tr}}$$

$$-Dx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

- *Differentialgleichung:*

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{D}{m}x = 0$$

Gedämpfte Schwingungen



- Zur Vereinfachung führen wir die Größen β und ω_0 ein.

- $\beta = \frac{b}{2m}$ und $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$

- Die *reelle* Differentialgleichung lautet jetzt:

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

- Die *komplexe* Differentialgleichung lautet:

$$\ddot{z} + 2\beta \dot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

Gedämpfte Schwingungen



- Komplexer Lösungsansatz: $z(t) = z_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$
- wobei z , z_0 und λ komplexe Zahlen

- 1. Ableitung: $\dot{z}(t) = z_0 \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot t}$

- 2. Ableitung: $\ddot{z}(t) = z_0 \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot t}$

- Einsetzen in die Dgl liefert:

$$(\lambda^2 + 2\beta \lambda + \omega_0^2) \cdot z_0 \cdot e^{\lambda \cdot t} = 0$$

Gedämpfte Schwingungen



- Lösung der quadratischen Gleichung:

$$\lambda^2 + 2\beta \lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda^2 + 2\beta \lambda + \beta^2 = \beta^2 - \omega_0^2$$

$$\lambda = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

- β und ω_0 sind reelle Zahlen. Deshalb ist λ dann komplex, wenn der Radikand negativ ist.

Fallunterscheidung: 1. Fall



- **1. Fall:** Wenn $\beta^2 < \omega_0^2$, dann wird der Radikand negativ:

$$\lambda = -\beta \pm \sqrt{(-1) \cdot \omega_e^2}$$

- **Lösungsgleichung:** $x(t) = x_0 \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot e^{\pm i \cdot \omega_e \cdot t}$

- mit der Kreisfrequenz: $\omega_e = \pm \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

- **Beachte:** ω_e ist nicht gleich ω_0

Diskussion



- $\beta^2 < \omega_0^2$ ist identisch mit: $b < 2 \cdot \sqrt{m \cdot D}$
- Der Realteil der Lösung lautet:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot \cos(\omega_e \cdot t)$$

- Dies ist die Überlagerung einer periodischen Funktion ($\cos(\omega_e t)$) mit **Kreisfrequenz** ω_e und einer Exponentialfunktion mit Exponenten $-\beta \cdot t$.
- **Beachte:** ω_e und β sind positive reelle Zahlen!!!

Fallunterscheidung: 2. Fall



- **2. Fall:** Wenn $\beta^2 = \omega_0^2$ bzw. $b = 2 \cdot \sqrt{mD}$ dann wird der Radikand null:
$$\lambda = -\beta$$
- $x(t) = x_0 \cdot e^{-\beta \cdot t}$ ist **eine** Lösung.
- **Eine weitere Lösung ist:** $x(t) = x_0 \cdot t \cdot e^{-\beta \cdot t}$
- Wir **beweisen** dies durch ableiten und einsetzen in die Differentialgleichung.

Beweis:



- **Differentialgleichung:** $\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \beta^2 x = 0$

- **Lösung:** $x(t) = x_0 \cdot t \cdot e^{-\beta \cdot t}$

- 1. Ableitung: $\dot{x}(t) = x_0 \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot (1 - \beta t)$

- 2. Ableitung: $\ddot{x}(t) = x_0 \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot (\beta^2 t - 2\beta)$

- Setze die Funktion und die Ableitungen in die (reelle) Differentialgleichung ein.

Beweis:

- Einsetzen liefert:

$$x_0 \cdot e^{-\beta \cdot t} \left[(\beta^2 t - 2\beta) + 2\beta(1 - \beta t) + \beta^2 t \right] = 0$$

$$x_0 \cdot e^{-\beta \cdot t} \left[\cancel{\beta^2 t} - \cancel{2\beta} + \cancel{2\beta} - \cancel{2\beta^2 t} + \cancel{\beta^2 t} \right] = 0$$

•

q.e.d

- **Jede Linearkombination** dieser beiden Lösungen ist ebenfalls eine allgemeine Lösung. Für ein spezielles physikalisches System hängt die Lösung von den **Anfangsbedingungen** ab.

Fallunterscheidung: 3. Fall



- **3. Fall:** Wenn $\beta^2 > \omega_0^2$, dann wird der Radikand positiv. Die Wurzel liefert also eine reelle Zahl. Die reelle Lösung lautet:

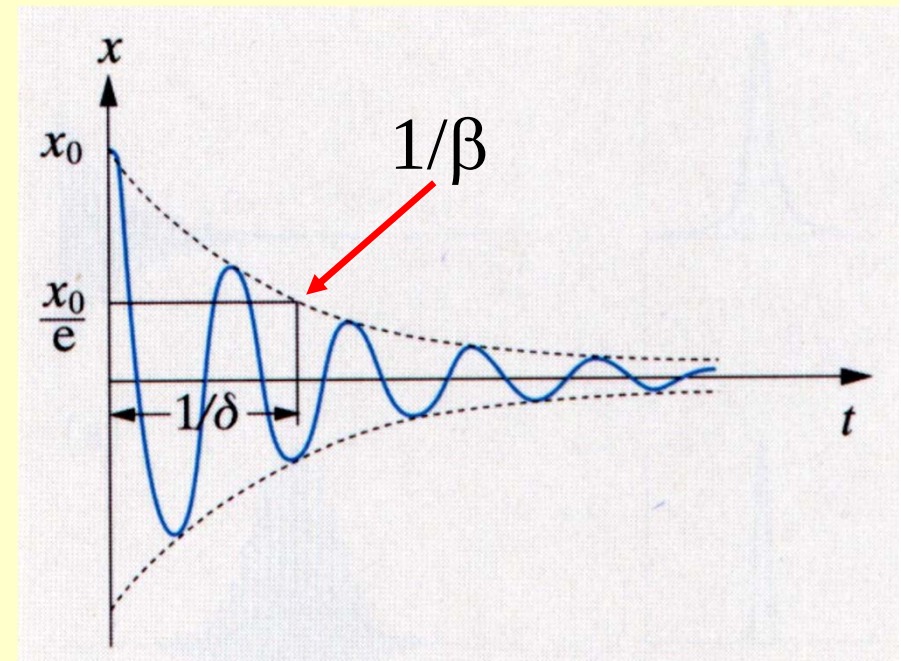
$$x(t) = x_0 \cdot e^{-\delta \cdot t}$$

- wobei: $\delta = \beta \mp \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$
- $\beta^2 > \omega_0^2$ ist identisch mit $b > 2 \cdot \sqrt{mD}$

1. Fall: Schwingfall



- Das System schwingt mit $\omega < \omega_0$. Für die Schwingungsdauer gilt: $T > T_0$. Die periodische Schwingung wird durch die Exponentialfunktion $e^{-\beta t}$ „gedämpft“.
- Nach der Zeit $1/\beta$ hat die Amplitude auf den Wert x_0/e abgenommen.



1. Fall: Schwingfall



- Für die Kreisfrequenz gilt: $\omega_e = +\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$
- mit $\beta = \frac{b}{2m}$ und $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$
- Die Kreisfrequenz ω_e hängt (wie bei der ungedämpften Schwingung) nur von der Masse m , der Federkonstante D und der Reibungskonstanten b ab.
- Sie hängt jedoch **nicht** von der Amplitude ab

Logarithmisches Dekrement



- Betrachte aufeinanderfolgende Maxima:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_0 \cdot e^{-\beta(n+1)T}}{x_0 \cdot e^{-\beta nT}} = e^{-\beta T} = \text{const.}$$

- Man definiert als *logarithmische Dekrement*:

$$\Lambda = \beta \cdot T$$

- Für das Verhältnis beliebiger, aufeinanderfolgender Amplituden gilt deshalb:

$$\frac{x_{n+k}}{x_n} = e^{-k \cdot \Lambda} = \text{const.}$$

Schwingungsenergie



- Wir betrachten ein System mit maximaler Amplitude zum Zeitpunkt $t = 0$. Für die *Anfangsenergie* gilt: $E_0 = \frac{1}{2} D x_0^2$
- Die Schwingungsamplitude nimmt mit der Zeit ab. Folglich nimmt auch die Energie des Systems ab.

$$E_n = \frac{1}{2} D x_n^2 = \frac{1}{2} D x_0^2 \cdot e^{-2n\Lambda} = E_0 \cdot e^{-2n\Lambda}$$

- Für den *relativen Energieverlust* gilt:

$$(E_0 - E_n) / E_0 = 1 - e^{-2n\Lambda}$$

Gütefaktor oder Q-Faktor



- Aus der vorherigen Gleichung erhalten wir:

$$(E_{n-1} - E_n) / E_{n-1} = \Delta E / E = 1 - e^{-2\Lambda} = 1 - e^{-2\beta \cdot T}$$

- Die Reihenentwicklung der e-Funktion lautet:

$$e^{-2\beta T} = 1 + \frac{(-2\beta T)}{1!} + \frac{(-2\beta T)^2}{2!} + \dots$$

- Für kleine Dämpfung $\beta < \omega_0$ folgt:

$$\Delta E / E = 1 - 1 + 2\beta \cdot T = 2\beta \cdot T$$

- Q-Faktor:** $Q = 2\pi \cdot (E / \Delta E) = \pi / (\beta \cdot T)$

Spezielle Schwingungslösung

- Die allgemeine Lösung für λ ist $\lambda = -\beta \pm i \cdot \omega_e$

Es folgt:
$$z(t) = e^{-\beta \cdot t} \left(A_1 e^{+i\omega_e t} + A_2 e^{-i\omega_e t} \right)$$

- Verwendet man die Eulersche Gleichung, so erhält man für den Realteil und dessen Ableitung:

$$x(t) = e^{-\beta t} \left(a \cdot \sin(\omega_e t) + b \cdot \cos(\omega_e t) \right)$$

$$\dot{x}(t) = e^{-\beta t} \left[(a\omega_e - b\beta) \cos(\omega_e t) - (b\omega_e + a\beta) \sin(\omega_e t) \right]$$

Schwingungslösung: Beispiel 1

- **1. Bedingung:** $x(t = 0) = x_0$ und $\dot{x}(t = 0) = 0$

- **Lösungen:** $b = x_0$ und $a = x_0 \frac{\beta}{\omega}$

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-\beta t} \left(\frac{\beta}{\omega_e} \sin(\omega_e t) + \cos(\omega_e t) \right)$$

$$\dot{x}(t) = -x_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \frac{\omega_e^2 + \beta^2}{\omega_e} \sin(\omega_e t)$$

Schwingungslösung: Beispiel 2

- **1. Bedingung:** $x(t = 0) = 0$ und $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0$
- **Lösungen:** $b = 0$ und $a = \frac{\dot{x}_0}{\omega}$

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin(\omega_e t)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \left[\cos(\omega_e t) + \frac{\beta}{\omega} \cdot \sin(\omega_e t) \right]$$

2. Fall: Aperiodischer Grenzfall

- Das System *schwingt nicht*. Wir betrachten als Beispiel ein Pendel, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ bei x_0 mit der Geschwindigkeit $v = 0$ losgelassen wird.
- Zeigen Sie, dass $x(t) = x_0 \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot (1 + \beta \cdot t)$
- die Lösung für diese Anfangsbedingungen ist.
- Beim aperiodischen Grenzfall kehrt ein schwingendes System in der *kürzest möglichen Zeit* wieder in die Ruhelage zurück.
- **Anwendung:** Immer dann, wenn Schwingungen unerwünscht sind, z. B. Stoßdämpfer am Auto....

Spezielle Grenzfalllösung



- Die allgemeine Lösung für λ ist $\lambda = -\beta$
wobei λ eine reelle Zahl. Es folgt:

$$x(t) = e^{-\beta t} (A_1 + A_2 t)$$

$$\dot{x}(t) = e^{-\beta t} [A_2 \cdot (1 - \beta t) - A_1 \beta]$$

- Die reellen Konstanten A_1 und A_2 werden wieder aus den Anfangsbedingungen gewonnen.

Grenzfalllösung: Beispiel 1



- **1. Bedingung:** $x(t=0) = x_0$ und $\dot{x}(t=0) = 0$
- **Lösungen:** $A_1 = x_0$ und $A_2 = \beta x_0$

$$x(t) = x_0 \cdot (1 + \beta t) \cdot e^{-\beta t}$$

$$x(t) = -x_0 \cdot \beta^2 \cdot t \cdot e^{-\beta t}$$

Grenzfalllösung: Beispiel 2



- **1. Bedingung:** $x(t = 0) = 0$ und $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0$
- **Lösungen:** $A_1 = 0$ und $A_2 = \dot{x}_0$

$$x(t) = \dot{x}_0 \cdot t \cdot e^{-\beta t}$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0 \cdot (1 - \beta \cdot t) \cdot e^{-\beta t}$$

3. Fall: Kriechfall



- Die allgemeine Lösung für λ ist $\lambda = -\beta \pm \gamma$
- mit der reellen Konstante $\gamma = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$

$$x(t) = e^{-\beta t} (A_1 e^{+\gamma t} + A_2 e^{-\gamma t})$$

$$\dot{x}(t) = -e^{-\beta t} [(\beta - \gamma) \cdot A_1 e^{\gamma t} + (\beta + \gamma) \cdot A_2 e^{-\gamma t}]$$

- Die reellen Konstanten ergeben sich aus den Anfangsbedingungen.

Kriechfalllösung: Beispiel 1



- **1. Bedingung:** $x(t = 0) = x_0$ und $\dot{x}(t = 0) = 0$

$$x_0 = A_1 + A_2 \qquad 0 = (\beta - \gamma) \cdot A_1 + (\beta + \gamma) \cdot A_2$$

- **Lösungen:**

$$A_1 = x_0 \frac{\beta + \gamma}{2\gamma} \qquad A_2 = -x_0 \frac{\beta - \gamma}{2\gamma}$$

$$x(t) = x_0 e^{-\beta \cdot t} \left(\frac{\beta + \gamma}{2\gamma} e^{+\gamma \cdot t} - \frac{\beta - \gamma}{2\gamma} e^{-\gamma \cdot t} \right)$$

$$\dot{x}(t) = -x_0 e^{-\beta \cdot t} \frac{\beta^2 - \gamma^2}{2\gamma} \cdot (e^{\gamma \cdot t} - e^{-\gamma \cdot t})$$

Kriechfalllösung: Beispiel 2



- **1. Bedingung:** $x(t=0)=0$ und $\dot{x}(t=0)=\dot{x}_0$

$$0 = A_1 + A_2 \quad \dot{x}_0 = (\beta - \gamma)A_1 + (\beta + \gamma)A_2$$

- **Lösungen:** $A_1 = \frac{\dot{x}_0}{2\gamma} \quad A_2 = -\frac{\dot{x}_0}{2\gamma}$

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{2\gamma} \cdot e^{-\beta t} (e^{\gamma t} - e^{-\gamma t})$$

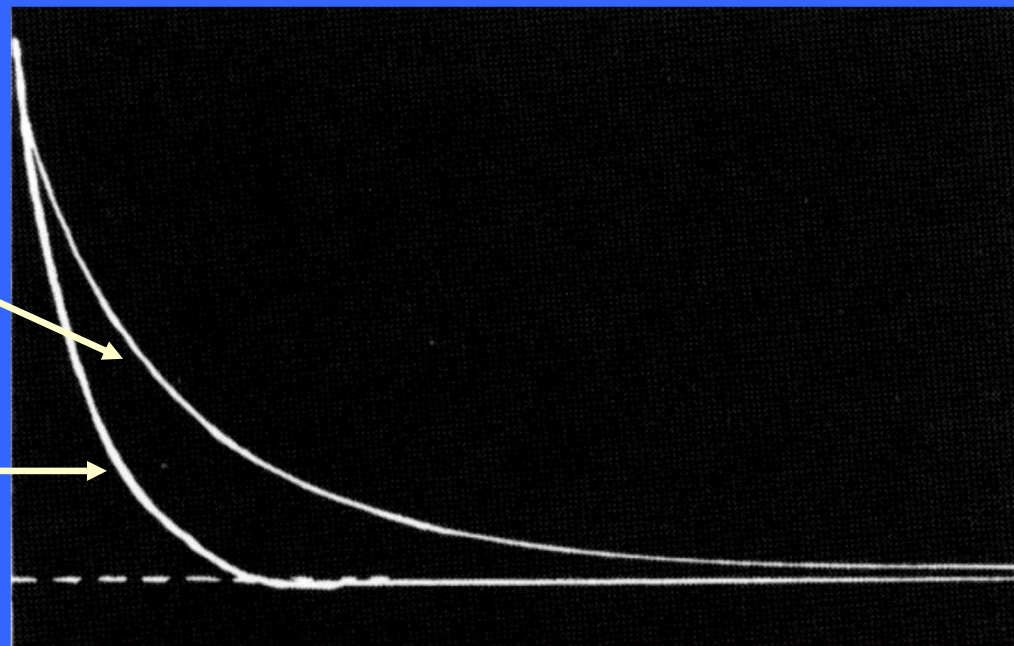
$$\dot{x}(t) = -\dot{x}_0 \cdot e^{-\beta t} \left(\frac{\beta - \gamma}{2\gamma} e^{+\gamma t} - \frac{\beta + \gamma}{2\gamma} e^{-\gamma t} \right)$$

3. Fall: Kriechfall



- Das System *schwingt nicht*, sondern bewegt sich exponentiell wieder in die Ruhelage. Dies geschieht aber immer langsamer als beim aperiodischen Grenzfall.

- Kriechfall:
- aperiodischer Grenzfall:



Vergleich der Schwingungen



- Um die drei Fälle (*Schwingfall*, *aperiodischer Grenzfall* und *Kriechfall*) vergleichen zu können, muss man deren Lösungen für gleiche Anfangsbedingungen miteinander vergleichen.

- ***Beispiel 1:***

- Die Auslenkung soll zum Zeitpunkt $t = 0$ maximal, also x_0 , sein.

$$x(t = 0) = x_0$$

- Die Geschwindigkeit soll zum Zeitpunkt $t = 0$ null sein.

$$\dot{x}(t = 0) = 0$$

Beispiel 1: $x(0) = x_0$, $v(0) = 0$



- **Schwingfall:**

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \left(\frac{\beta}{\omega} \sin(\omega_e t) + \cos(\omega_e t) \right)$$

- **Aperiodischer Grenzfall:**

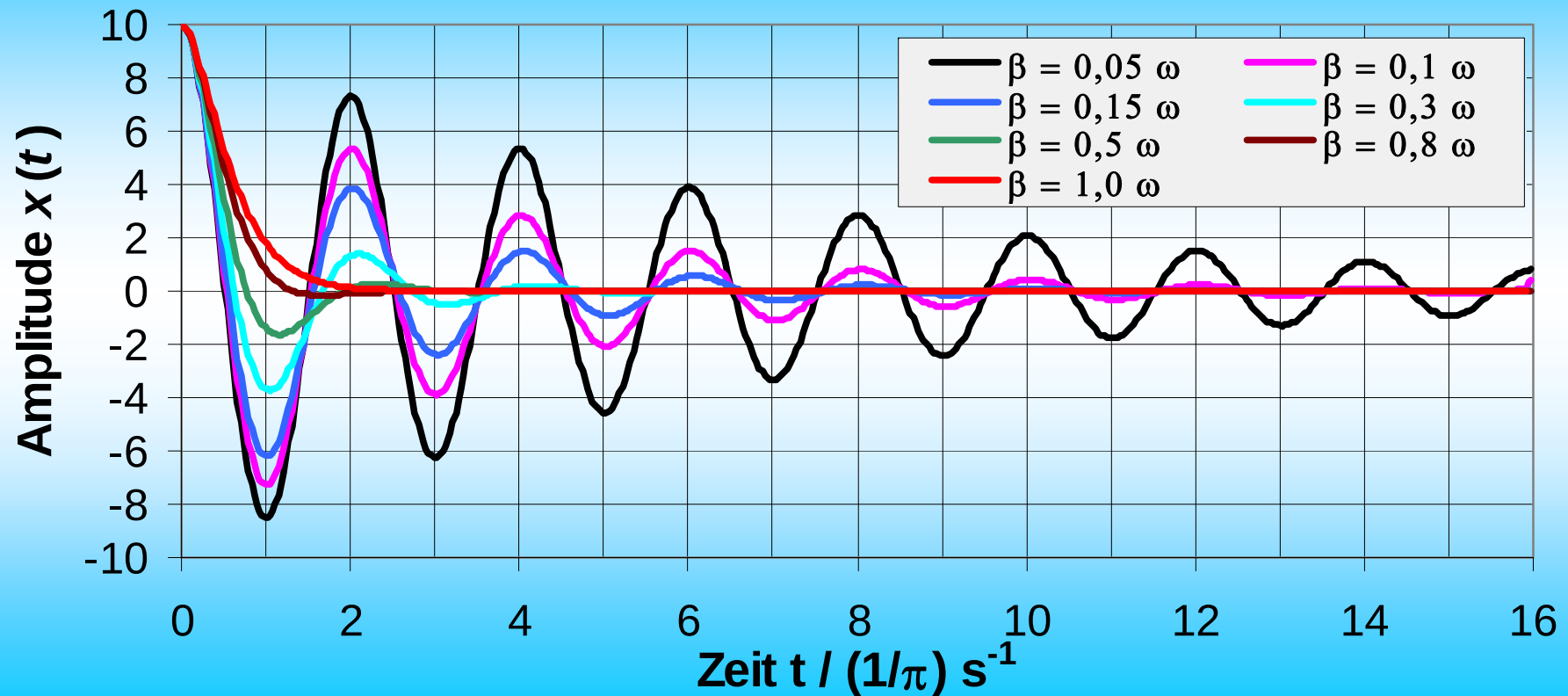
$$x(t) = x_0 \cdot (1 + \beta \cdot t) \cdot e^{-\beta t}$$

- **Kriechfall:**

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-\beta t} \left(\frac{\beta - \gamma}{2\gamma} e^{+\gamma t} - \frac{\beta + \gamma}{2\gamma} e^{-\gamma t} \right)$$

Dämpfung: $0,05 \cdot \omega_0 < \beta < 1,0 \cdot \omega_0$

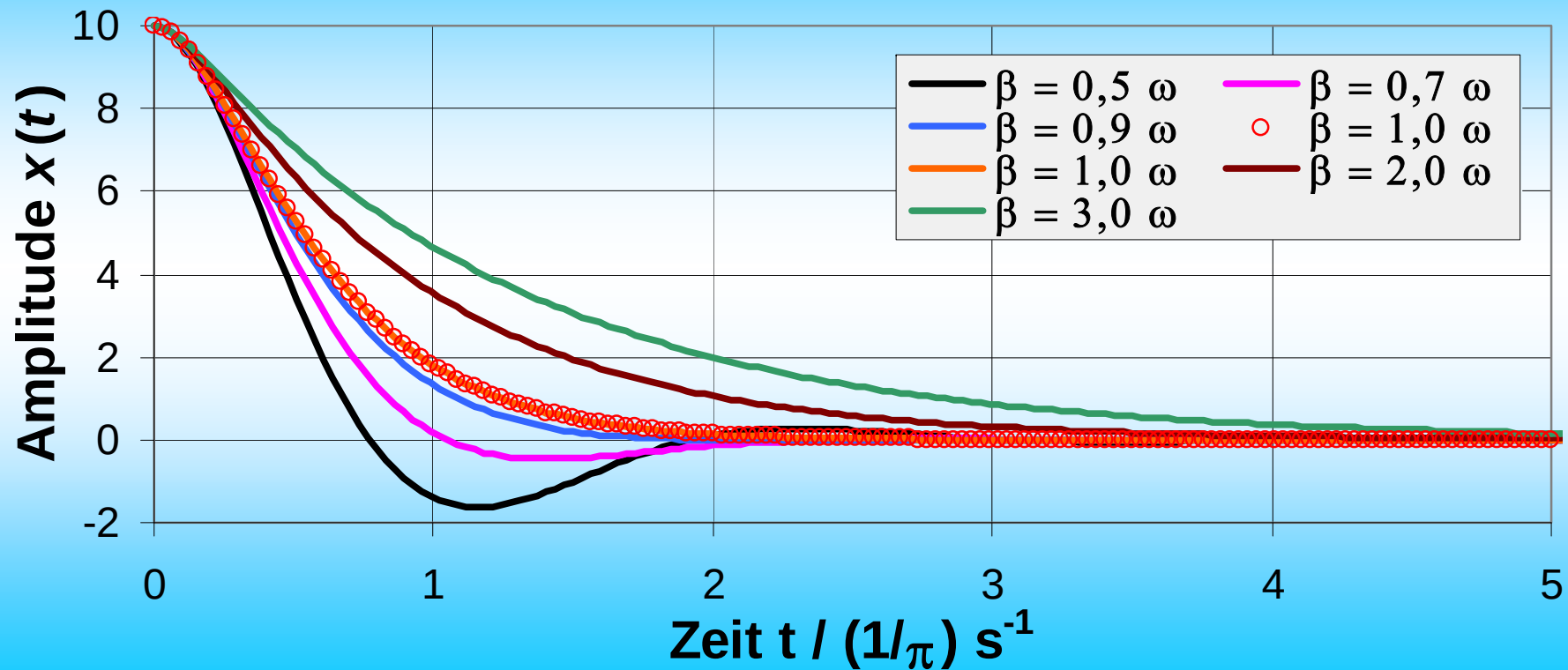
Gedämpfte Schwingung: $x_0 = 10$; $\omega_0 = 1$; $\beta = \text{variabel}$



Dämpfung: $0,5 \cdot \omega_0 < \beta < 3,0 \cdot \omega_0$



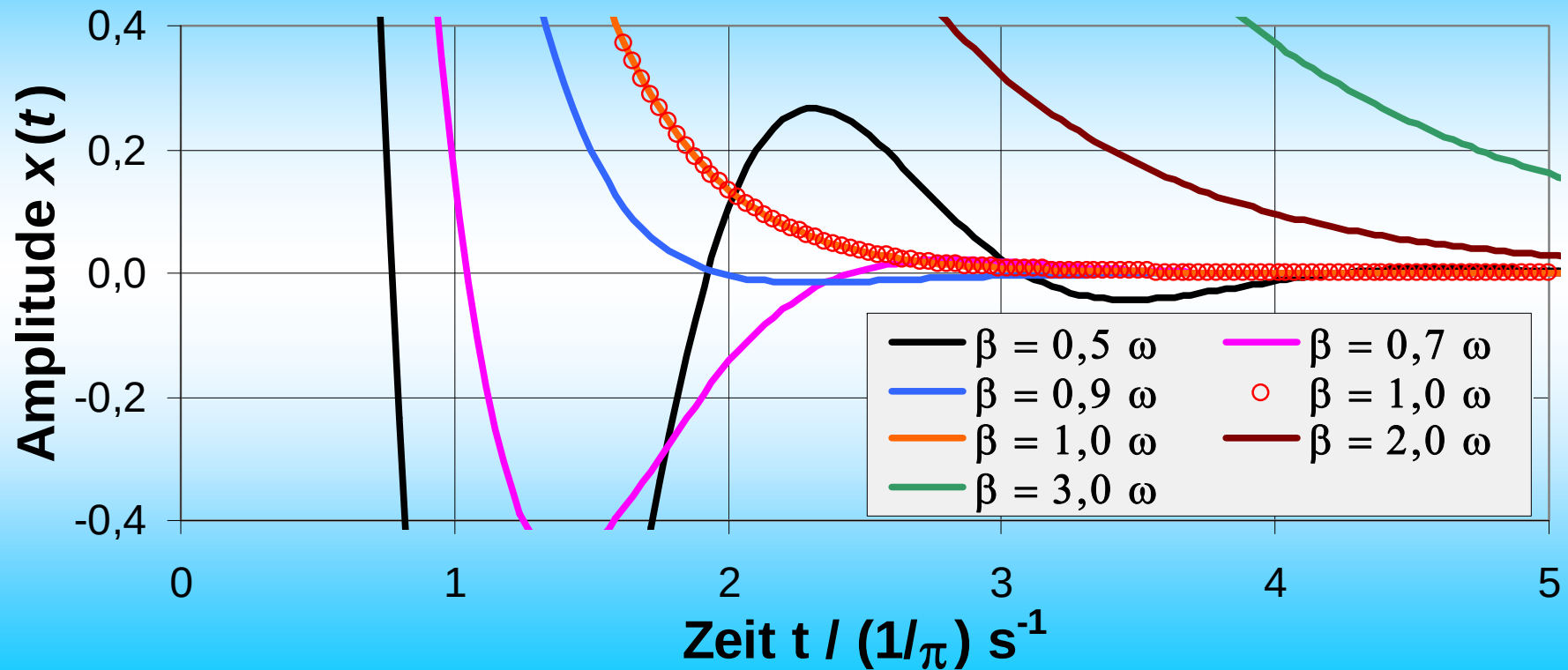
Gedämpfte Schwingung: $x_0 = 10$; $\omega = 1$; $\beta = \text{variabel}$
Vergleich von Schwing- Grenz- und Kriechfall



Dämpfung: $0,5 \cdot \omega_0 < \beta < 3,0 \cdot \omega_0$



Gedämpfte Schwingung: $x_0 = 10$; $\omega = 1$; $\beta = \text{variabel}$
Vergleich: Schwing- aperiodischer Grenz- und Kriechfall



Beispiel 2: $x(0) = 0$, $v(0) = v_0$



- **Schwingfall:**

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_e} \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin(\omega_e t)$$

- **Aperiodischer Grenzfall:**

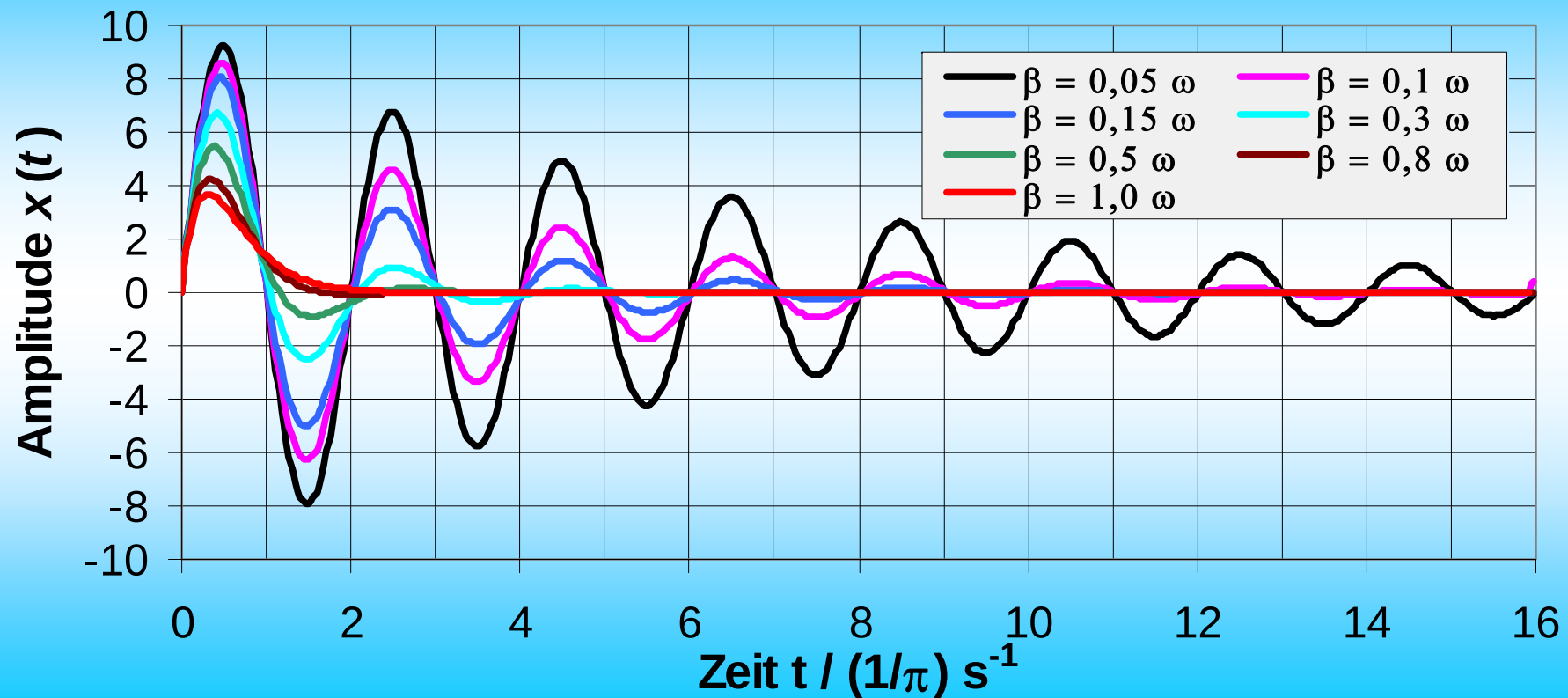
$$x(t) = \dot{x}_0 \cdot t \cdot e^{-\beta t}$$

- **Kriechfall:**

$$x(t) = e^{-\beta t} \cdot \frac{\dot{x}_0}{2\gamma} \cdot (e^{\gamma t} - e^{-\gamma t})$$

Dämpfung: $0,05 \cdot \omega_0 < \beta < 1,0 \cdot \omega_0$

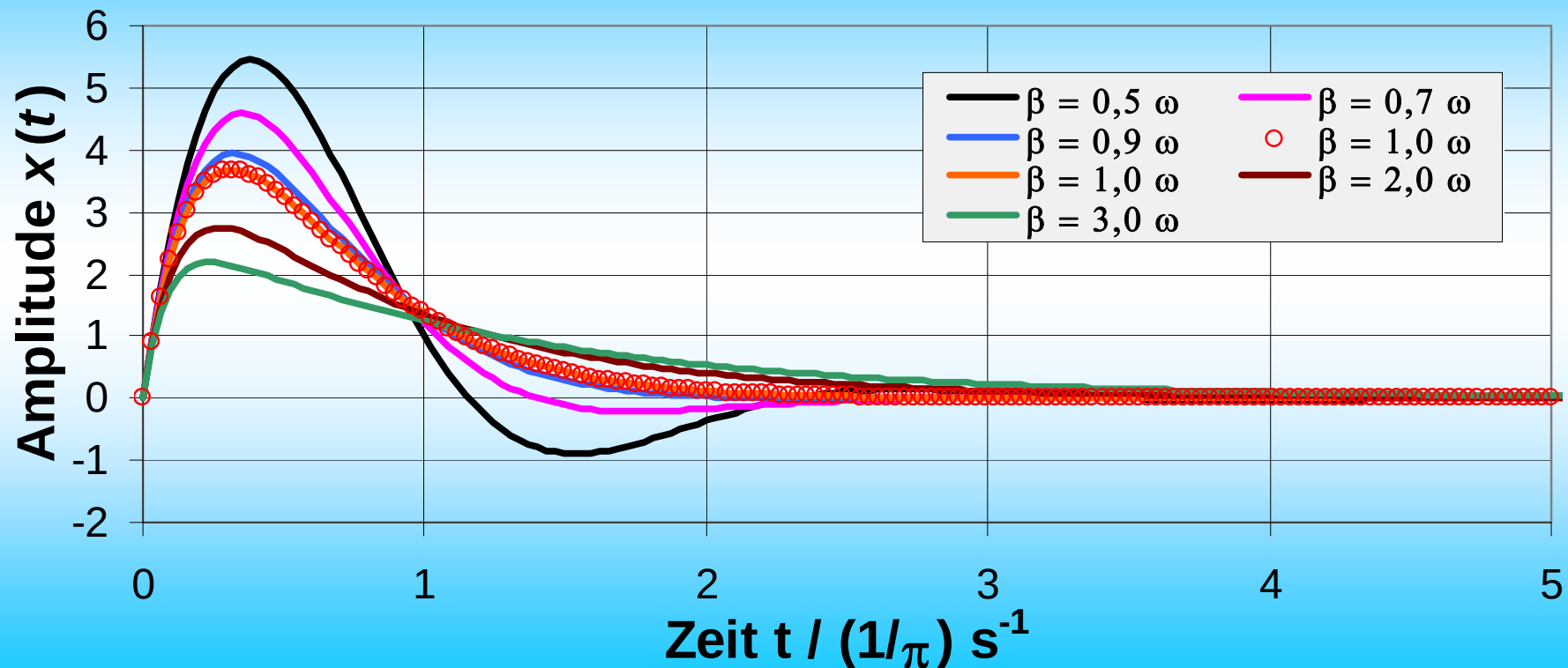
Gedämpfte Schwingung: $\nu_0 = 10$; $\omega_0 = 1$; $\beta = \text{variabel}$



Dämpfung: $0,5 \cdot \omega_0 < \beta < 3,0 \cdot \omega_0$



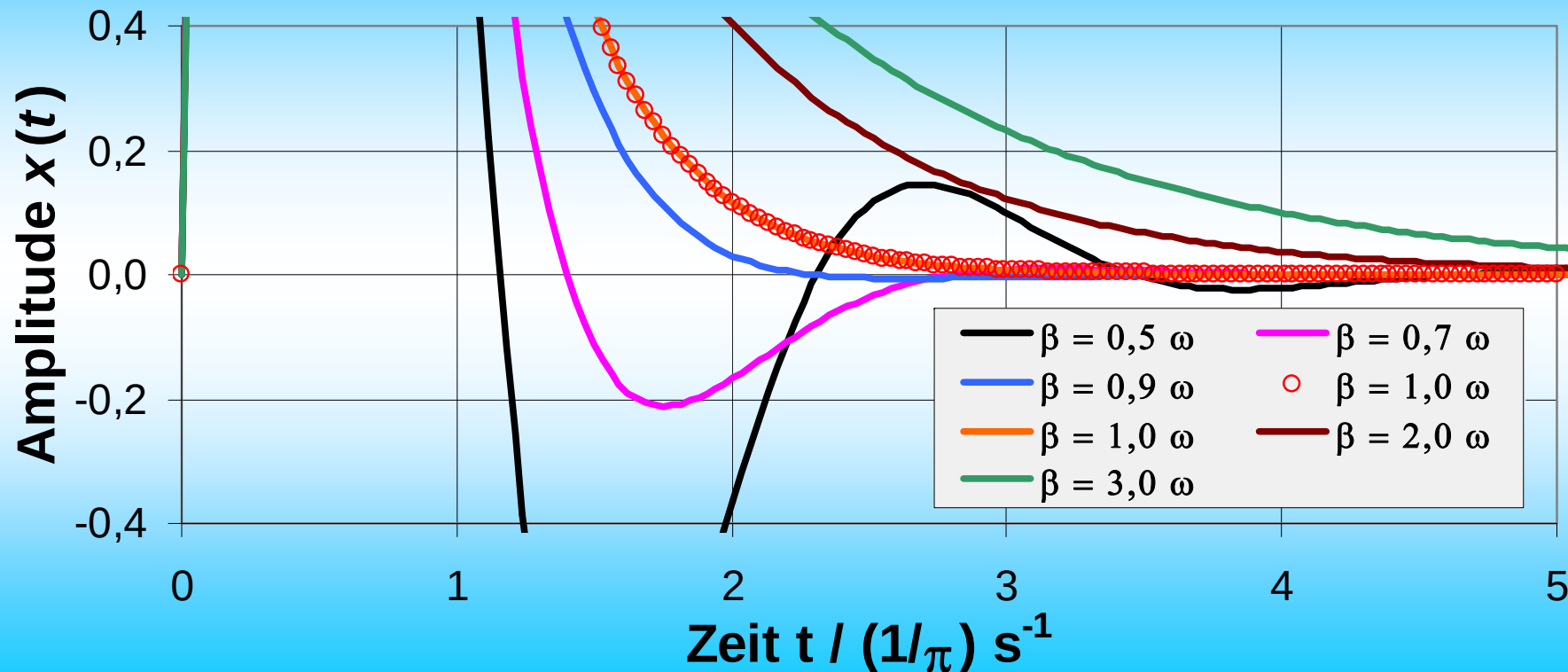
Gedämpfte Schwingung: $\nu_0 = 10$; $\omega = 1$; $\beta = \text{variabel}$
Vergleich von Schwing- Grenz- und Kriechfall



Dämpfung: $0,5 \cdot \omega_0 < \beta < 3,0 \cdot \omega_0$



Gedämpfte Schwingung: $\nu_0 = 10$; $\omega = 1$; $\beta = \text{variabel}$
Vergleich: Schwing- aperiodischer Grenz- und Kriechfall



2. Schwingungen

2c. *Geschwindigkeitsunabhängige Dämpfung*

Geschwindigkeitsunabhängige -|-| Dämpfung

- Wenn die **Reibungskraft geschwindigkeitsunabhängig** ist, lautet die Differentialgleichung:

$$m \ddot{x} + \mu F_N + D x = 0$$

- Da μF_N konstant ist, kann man „formal“ schreiben:

$$\mu F_N = D a$$

- und:
- $$m \ddot{x} + D (x + a) = 0$$

- (dies entspricht einer „Vorspannung“ der Feder)

Geschwindigkeitsunabhängige -|- Dämpfung

- Beim Wechsel der Geschwindigkeit ändert sich auch die Richtung der Reibungskraft:

$$-\mu F_N = -D a$$

- Man erhält **zwei Differentialgleichungen:**

$$m \ddot{x} + D(x - a) = 0 \quad \text{für } \dot{x} < 0$$

$$m \ddot{x} + D(x + a) = 0 \quad \text{für } \dot{x} > 0$$

Dämpfung: $\mu \cdot F_N$



- Substituiert man jetzt $y = x - a$ für $\dot{x} < 0$
- und $y = x + a$ für $\dot{x} > 0$ dann ist: $\ddot{y} = \ddot{x}$
- Die Dgl lautet: $m \ddot{y} + D y = 0$
- oder: $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$ mit: $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$
- **Lösungen** (zunächst nur für $0 < \omega \cdot t < 2\pi$):
$$x(t) - a = (b - a) \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \text{ für } \dot{x} < 0$$
$$x(t) + a = (b + a) \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \text{ für } \dot{x} > 0$$

Dämpfung: $\mu \cdot F_N$



- **Wahl der Anfangsbedingungen** (wie Beispiel 1):
- Die Schwingung soll am positiven Extrempunkt mit Geschwindigkeit $v = 0$ beginnen, also:

$$x(t = 0) = x_0 \quad \dot{x}(t = 0) = 0$$

- **Man erhält die Lösungen:**

$$x(t) = (x_0 - a) \cdot \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) + a \quad \text{für } 0 < \omega_0 t < \pi$$

$$x(t) = (x_0 + a) \cdot \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) - a \quad \text{für } \pi < \omega_0 t < 2\pi$$

Dämpfung: $\mu \cdot F_N$



- Man ersetze $\sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$ durch $\cos(\omega_0 t)$

$$x(t) = (x_0 - a) \cdot \cos(\omega_0 t) + a \quad \text{für } 0 < \omega_0 t < \pi$$

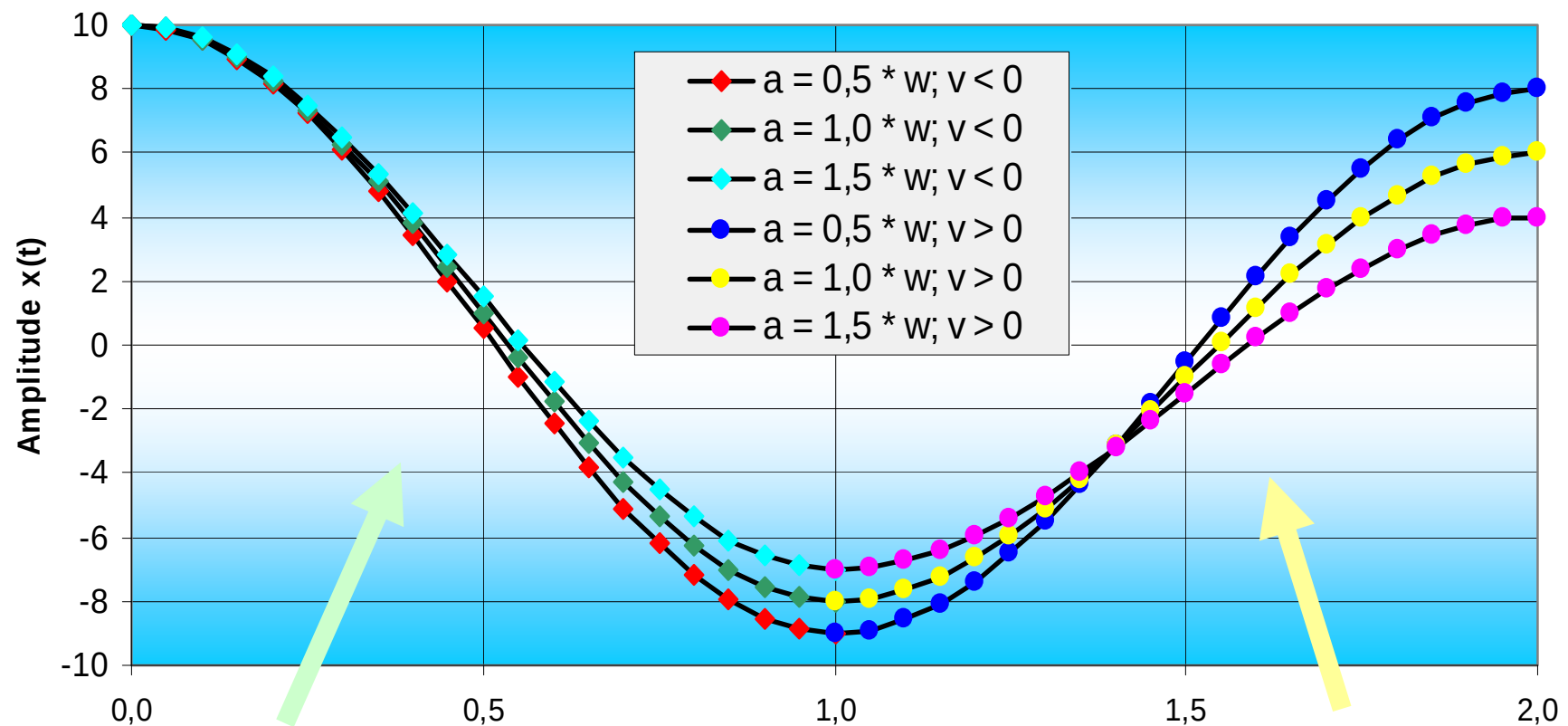
- Bei $\omega_0 t = \pi$ ist $x(\omega_0 t = \pi) = x_0 - 2 \cdot a$. Um die Funktion stetig weiter führen zu können, muß x_0 durch $x_1 = x_0 - 2 \cdot a$ ersetzt werden.

$$x(t) = (x_1 + a) \cdot \cos(\omega_0 t) - a \quad \text{für } \pi < \omega_0 t < 2\pi$$

Dämpfung: $\mu \cdot F_N$



Geschwindigkeitunabhängige Dämpfung: $-\mu F_N$



$$x(t) = (x_0 - a) \cdot \cos(\omega_0 t) + a$$

Zeit $t (1/\pi) \text{ s}^{-1}$

$$x(t) = (x_1 + a) \cdot \cos(\omega_0 t) - a$$

Dämpfung: $\mu \cdot F_N$



- Bei $\omega_0 t = 2\pi$ ist $x(\omega_0 t = 2\pi) = x_0 - 4 \cdot a$. Um die Funktion stetig weiter führen zu können, muss x_1 durch $x_2 = x_0 - 4 \cdot a$ ersetzt werden.
- Die allgemeinen Gleichungen lauten deshalb:

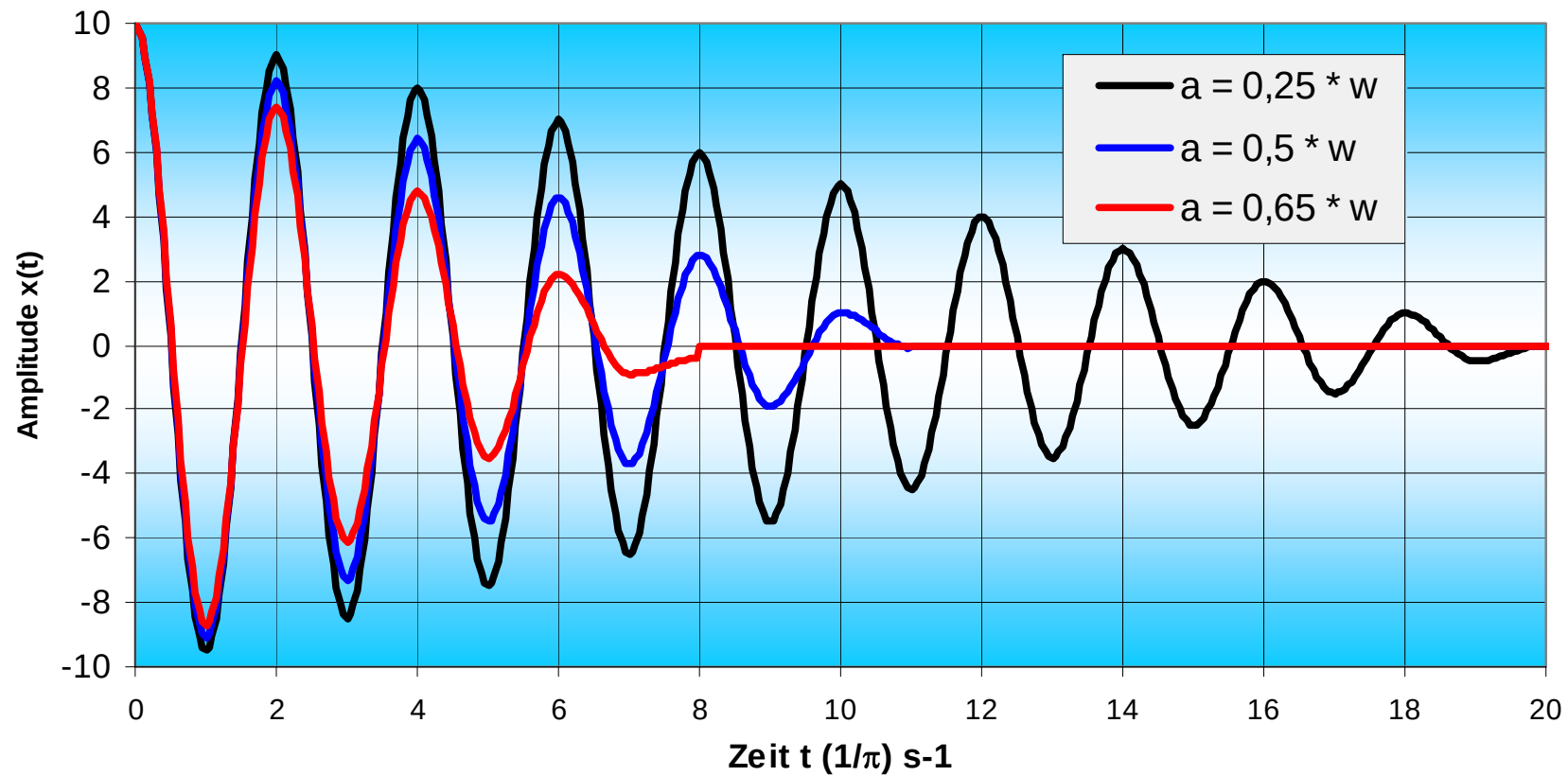
$$x_n(t) = (x_0 - 4a \cdot (n-1) - a) \cdot \cos(\omega_0 t) + a$$
$$\text{für } (2n-2) \cdot \pi < \omega_0 t < (2n-1) \cdot \pi$$

$$x_n(t) = (x_0 - 4a \cdot n + a) \cdot \cos(\omega_0 t) - a$$
$$\text{für } (2n-1) \cdot \pi < \omega_0 t < 2n \cdot \pi$$

Dämpfung: $\mu \cdot F_N$



Geschwindigkeitunabhängige Dämpfung: $-\mu F_N$



2. Schwingungen

2d. *Erzwungene Schwingungen*

Erzwungene Schwingung



- Man betrachtet ein schwingungsfähiges System der Masse m , einer Federkonstante D und einem *geschwindigkeitsabhängigem* Reibungsterm mit der Reibungskonstante b :

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + D x = 0$$

- mit $\beta = \frac{b}{2m}$ und $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$ erhält man:

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Erzwungene Schwingung



- Im Schwingfall $\beta < \omega_0$ führt ein harmonischer Oszillator eine periodische Bewegung mit der Eigenfrequenz ω_e aus: $\omega_e^2 = \omega_0^2 - \beta^2$
- Wird der Oszillator jetzt einer **periodischen Kraft** ausgesetzt, die die Kreisfrequenz ω_a hat, so schwingt er nach einer gewissen Zeit (**Einschwingvorgang**) auch mit der Frequenz ω_a .
- **Dem Oszillator wird also die äußere Frequenz ω_a aufgezwungen.**

Erzwungene Schwingung



- Die Beobachtung zeigt, dass die Amplitude des Systems und die Phasenverschiebung zwischen Erreger und schwingenden System von dem Verhältnis von ω_a zu ω_0 abhängen.
- **Grenzfälle:**
 - 1) Bei kleinem ω_a folgt das System dem Erreger, d. h. die Phasenverschiebung ist 0.
 - 2) Bei sehr großem ω_a sind Erreger und Schwinger gegenläufig, d. h. die Phasenverschiebung ist $180^\circ = \pi$.

Erzwungene Schwingung



- Wenn die Erregerfrequenz ω_a etwa gleich der Eigenfrequenz ω_0 des ungedämpften Systems ist, kann das schwingende System große Amplituden annehmen. Die Phasenverschiebung ist in diesem Fall $90^\circ = \pi/2$.
- **Ziel:** Amplitude x_0 und Phasenverschiebung φ sollen als Funktion der Erregerfrequenz bestimmt werden.

Differentialgleichung



- Für die auf das System wirkenden Kräfte gilt:

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + D x = F_a \cdot \sin(\omega_a t)$$

- mit der Abkürzung $f_a = F_a/m$, folgt:

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = f_a \cdot \sin(\omega_a t) \quad (\text{reell})$$

$$\ddot{z} + 2\beta \dot{z} + \omega_0^2 z = f_a \cdot e^{i\omega_a t} \quad (\text{komplex})$$



Lösung der Dgl

- Die *stationäre Lösung* (Einschwingvorgang abgeschlossen) muss ω_a enthalten.

$$z(t) = z_0 \cdot e^{i\omega_a t}$$

- Hier ist z_0 eine komplexe Amplitude, die ausgedrückt werden kann als:

$$z_0 = |z_0| \cdot e^{i\alpha}$$

- wobei $|z_0|$, der Betrag von z_0 , die physikalische Amplitude und α die Phase ist.

Ableitungen



- Die Ableitungen der komplexen Amplitudenfunktion $z(t)$ lauten:

$$z(t) = z_0 e^{i\omega_a t}$$

$$\dot{z}(t) = i\omega_a z_0 e^{i\omega_a t} = i\omega_a \cdot z(t)$$

$$\ddot{z}(t) = -\omega_a^2 z_0 e^{i\omega_a t} = -\omega_a^2 \cdot z(t)$$

Einsetzen in die Dgl



- Einsetzen von $z(t)$, $\dot{z}(t)$ und $\ddot{z}(t)$ in die Differentialgleichung:

$$\left(-\omega_a^2 + i 2\beta \omega_a + \omega_0^2\right) \cdot z(t) = f_a \cdot e^{i\omega_a t}$$

$$\left(-\omega_a^2 + i 2\beta \omega_a + \omega_0^2\right) \cdot |z_0| e^{i\alpha} \cdot e^{i\omega_a t} = f_a \cdot e^{i\omega_a t}$$

- Zur Vereinfachung wählen wir: $\alpha = -\varphi_0$

$$\left(\omega_0^2 - \omega_a^2\right) \cdot |z_0| + i 2\beta \omega \cdot |z_0| = f_a \cdot e^{i\varphi_0}$$

Interpretation

- Die rechte Seite der Gleichung ist eine komplexe Zahl, die durch den reellen Betrag f_a und den Phasenfaktor $e^{i\varphi_0}$ gebildet wird.

- Die linke Seite der Gleichung besteht aus dem

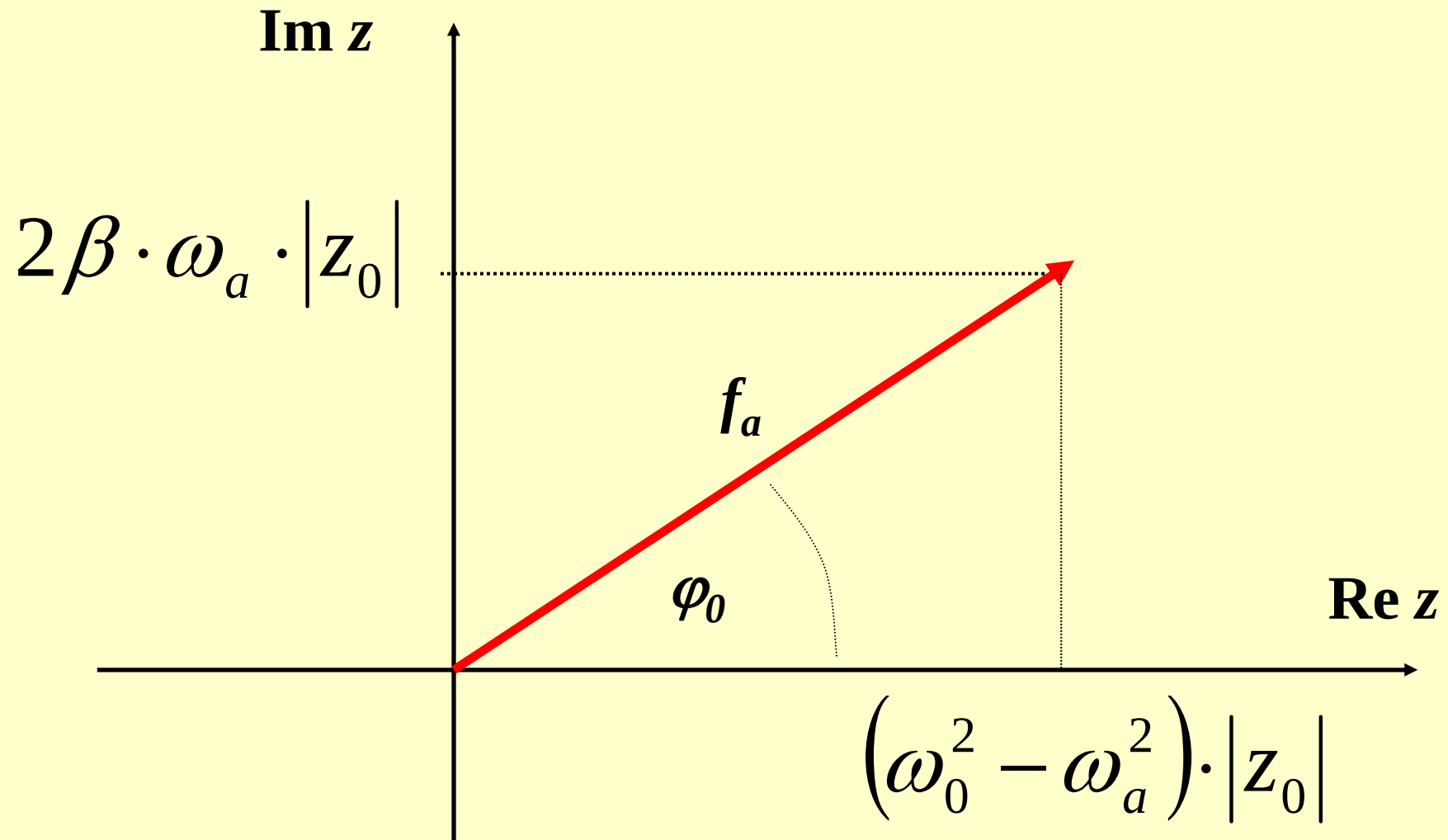
Realteil:

$$\left(\omega_0^2 - \omega_a^2\right) \cdot |z_0|$$

- und dem ***Imaginärteil:***

$$2\beta \cdot \omega_a \cdot |z_0|$$

Darstellung



Amplitude $x_0(\omega_a, \omega_0, \beta)$



- Das Quadrat von f_a kann aus Real- und Imaginärteil bestimmt werden:

$$\left(\omega_0^2 - \omega_a^2\right)^2 \cdot |z_0|^2 + \left(2\beta \cdot \omega_a\right)^2 \cdot |z_0|^2 = f_a^2$$

- Die Amplitude der erzwungenen Schwingung ist der Betrag von z_0 , der von ω_a , ω_0 und β abhängt:

$$x_0 = x_0(\omega_a, \omega_0, \beta) = |z_0| = \sqrt{|z_0|^2}$$

Amplitude $x_0(\omega_a, \omega_0, \beta)$



- *Lösung für die Amplitude:*

$$x_0(\omega_a, \omega_0, \beta) = \frac{f_a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_a^2)^2 - (2\beta\omega_a)^2}}$$

- *Sonderfall:* Wenn $\beta = 0$ und $\omega_a = \omega_0$, wird die Amplitude x_0 unendlich groß:
- *Resonanzkatastrophe*

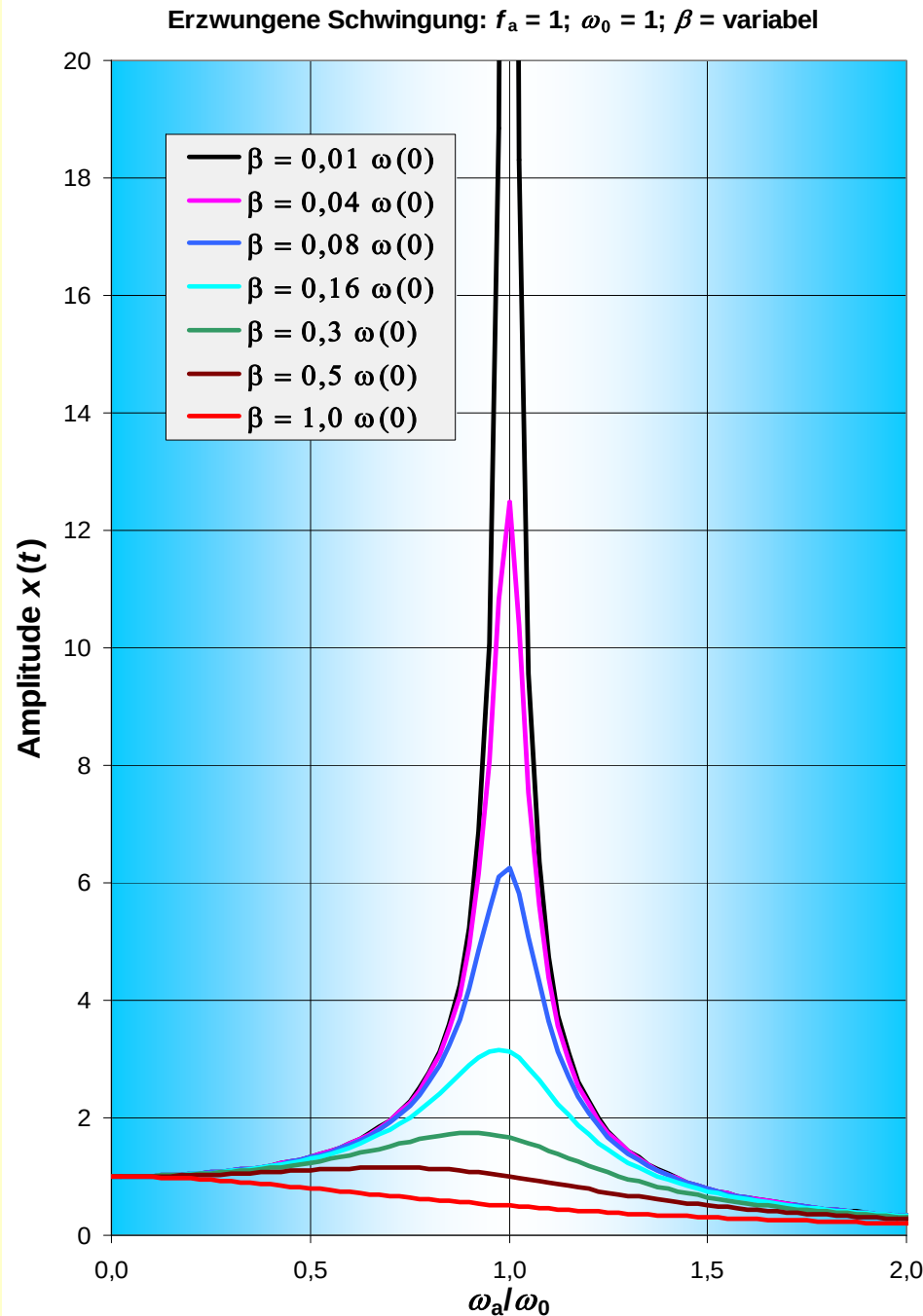
Phasenverschiebung φ_0



- Der Tangens der Phasenverschiebung $\tan \varphi_0$ ist das Verhältnis des Imaginärteils zum Realteil:

$$\tan \varphi_0(\omega_0, \omega_a, \beta) = \frac{2\beta \omega_a}{\omega_0^2 - \omega_a^2}$$

$$\varphi_0(\omega_0, \omega_a, \beta) = \arctan \frac{2\beta \omega_a}{\omega_0^2 - \omega_a^2}$$

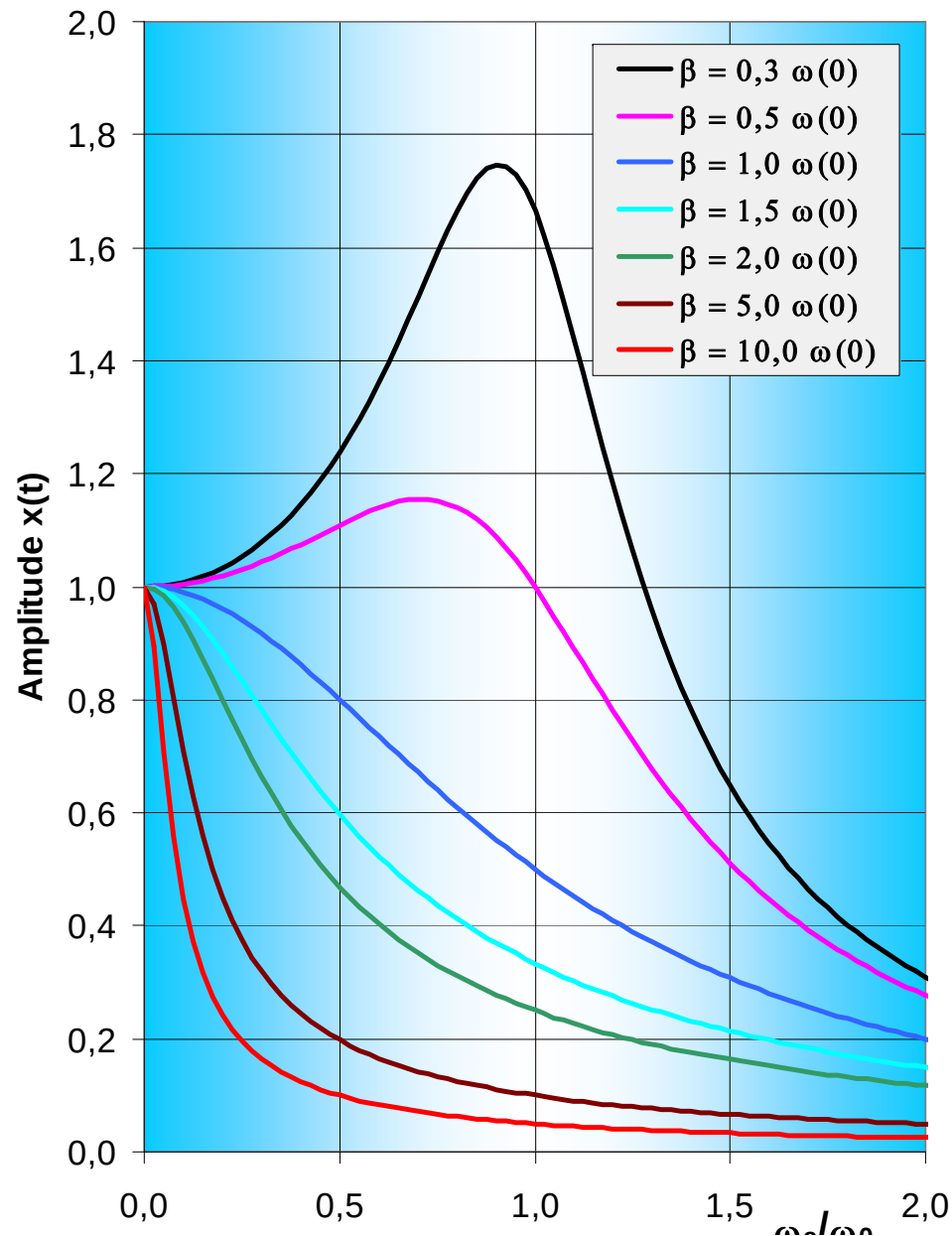


**Erzwungene
Schwingung:**

**Amplitude bei
kleiner
Dämpfung**



Erzwungene Schwingung: $f_a = 1$; $\omega_0 = 1$; $\beta = \text{variabel}$

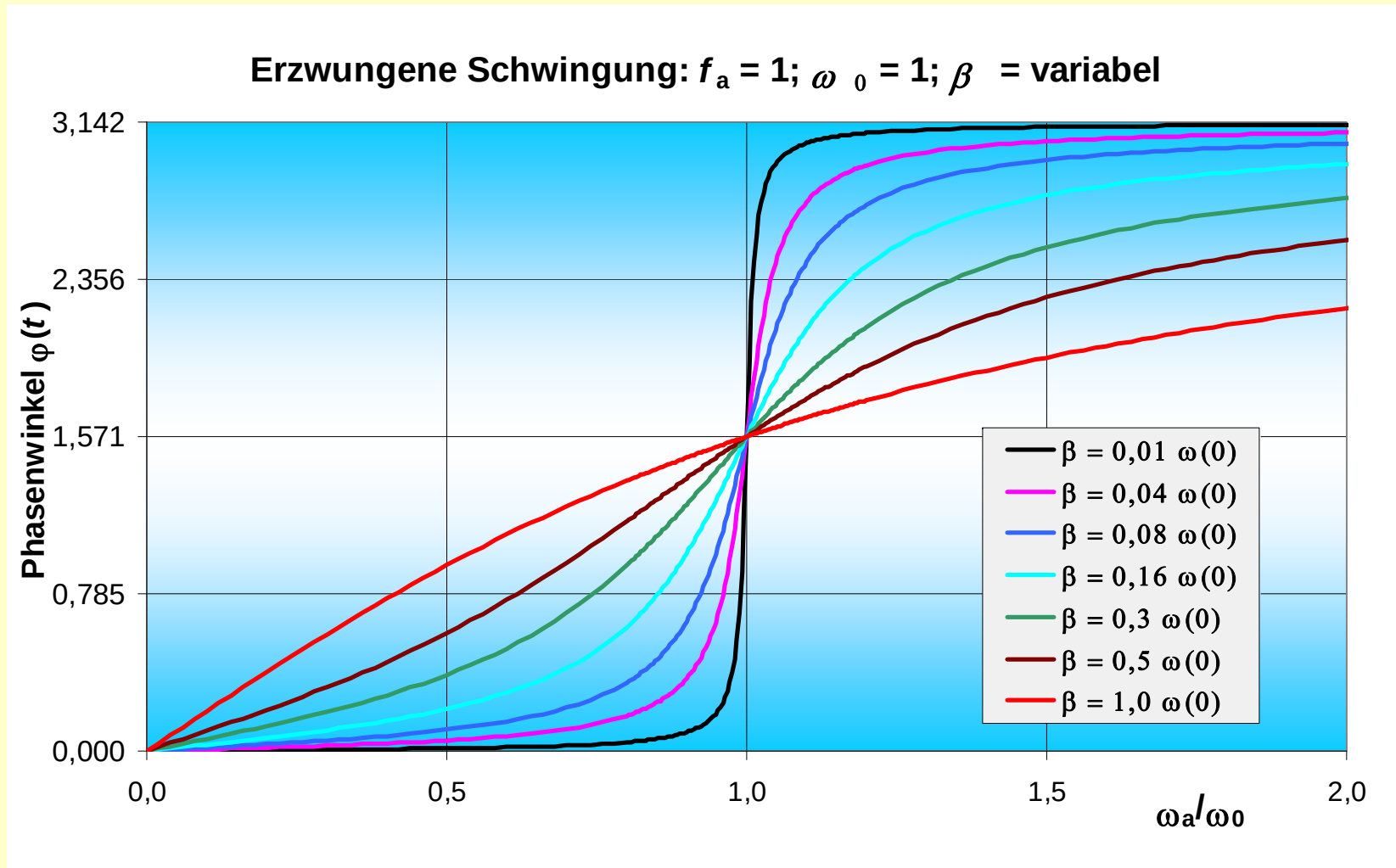


**Erzwungene
Schwingung:**

**Amplitude bei
großer
Dämpfung**

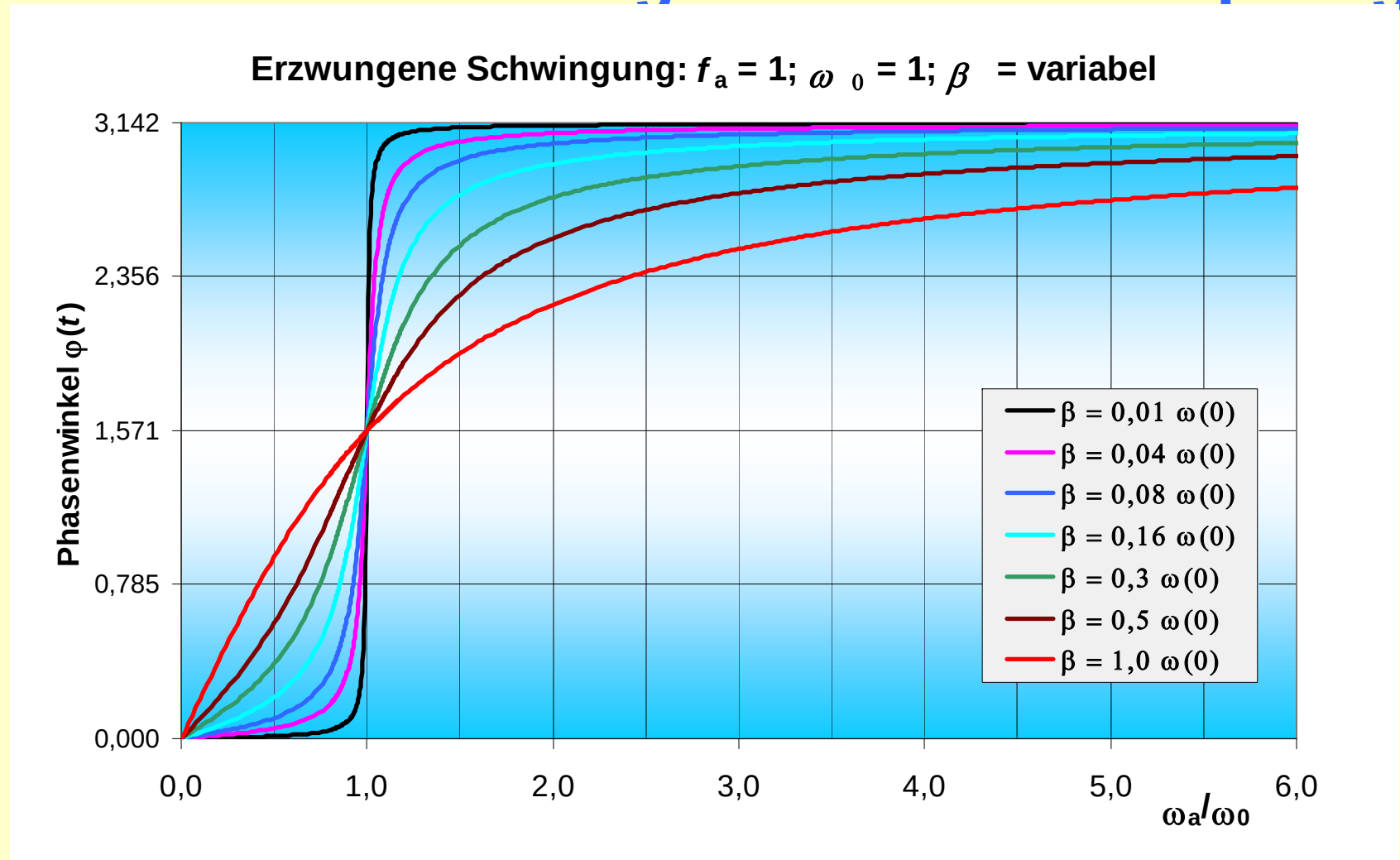
Erzwungene Schwingung:

Phasenverschiebung bei kleiner Dämpfung



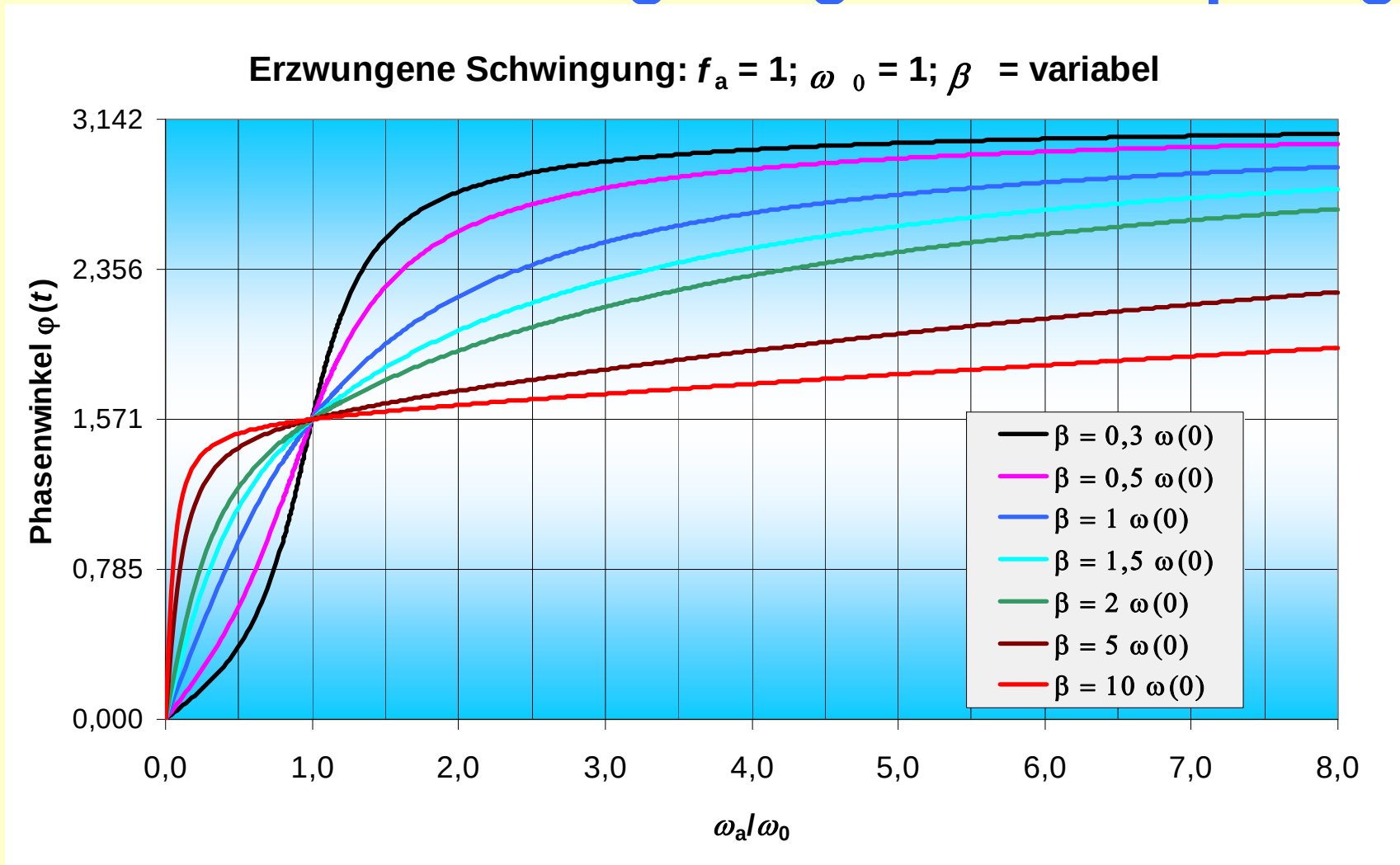
Erzwungene Schwingung:

Phasenverschiebung bei kleiner Dämpfung



Erzwungene Schwingung:

Phasenverschiebung bei großer Dämpfung



Resonanzfrequenz ω_R



- Bei der Resonanz(kreis)frequenz ω_R erreicht das schwingende System das Amplitudenmaximum:
- Berechnung von ω_R :

- 1. Ableitung

$$\frac{\partial x_0}{\partial \omega_a} = \frac{\partial}{\partial \omega_a} x_0(\omega_0, \omega_a = \omega_R, \beta) = 0$$

- 2. Ableitung

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial \omega_a^2} = \frac{\partial^2}{\partial \omega_a^2} x_0(\omega_0, \omega_a = \omega_R, \beta) < 0$$

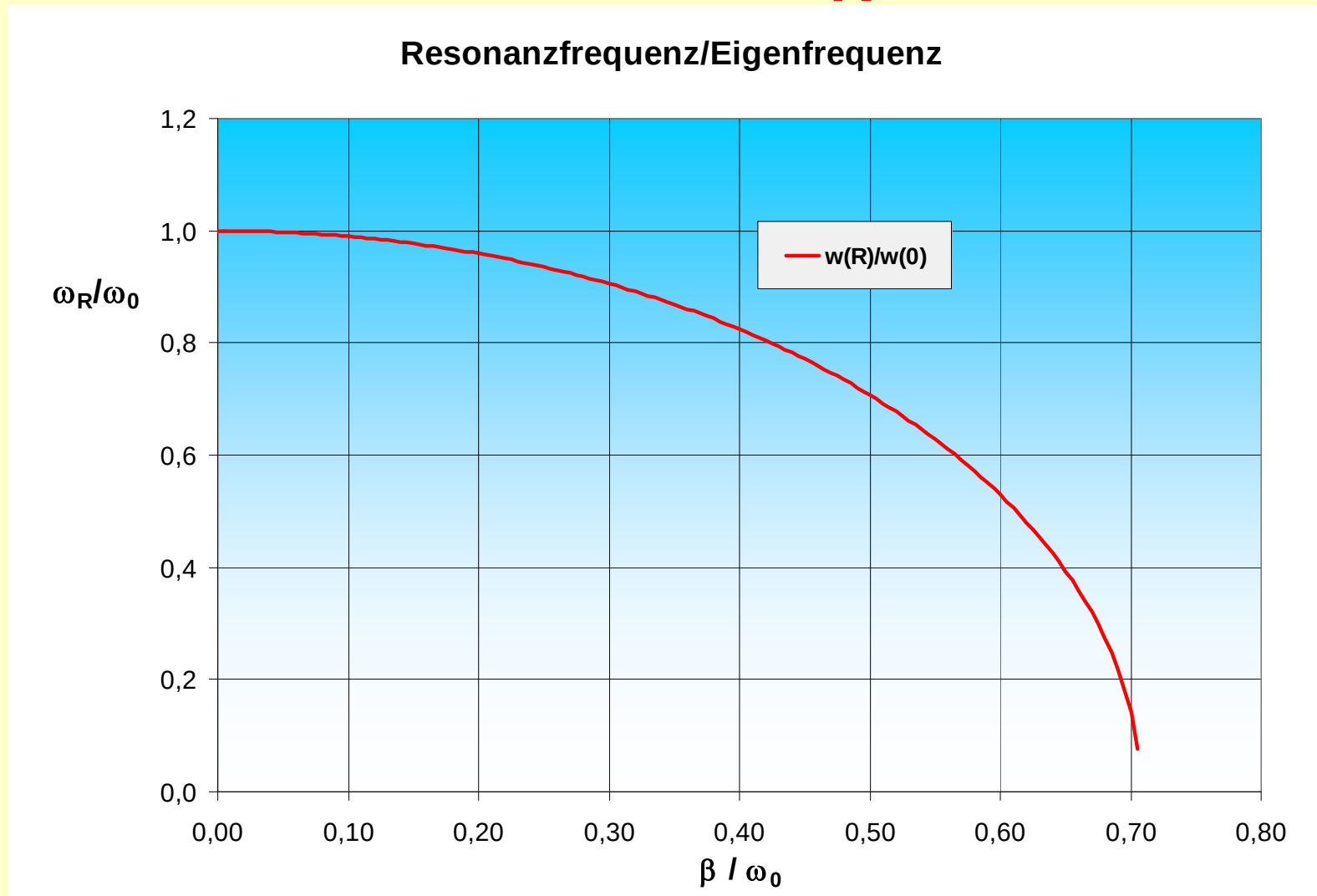
Resonanzfrequenz ω_R



$$\begin{aligned}\frac{\partial x_0}{\partial \omega_a} = 0 &= \frac{\partial}{\partial \omega_a} \left(\frac{f_a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_a^2)^2 + (2\beta\omega_a)^2}} \right) = \\ &= \frac{(-1/2)f_a}{\left[(\omega_0^2 - \omega_a^2)^2 + (2\beta\omega_a)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \cdot 2(\omega_0^2 - \omega_a^2) \cdot (-2\omega_a) + 2 \cdot (2\beta\omega_a) \cdot (2\beta) = \\ &= \frac{f_a \cdot (+2\omega_a) \cdot ((\omega_0^2 - \omega_a^2) - 2\beta^2)}{\left[(\omega_0^2 - \omega_a^2)^2 + (2\beta\omega_a)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

$$0 = \omega_0^2 - \omega_R^2 - 2\beta^2 \qquad \omega_R^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2$$

Resonanzfrequenz ω_R



Resonanzfrequenz ω_R



- Die Resonanzfrequenz ω_R ist immer kleiner als die Eigenfrequenz ω_0 des ungedämpften Systems :

$$0 < \omega_R < \omega_0$$

- Bei kleiner Dämpfung, $\beta/\omega_0 < 0,4$, liegt die Resonanzfrequenz dicht bei ω_0 . Es gilt: $\omega_R > 0,8 \cdot \omega_0$
- Bei $\beta > \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_0$ verschwindet die Resonanz-überhöhung.

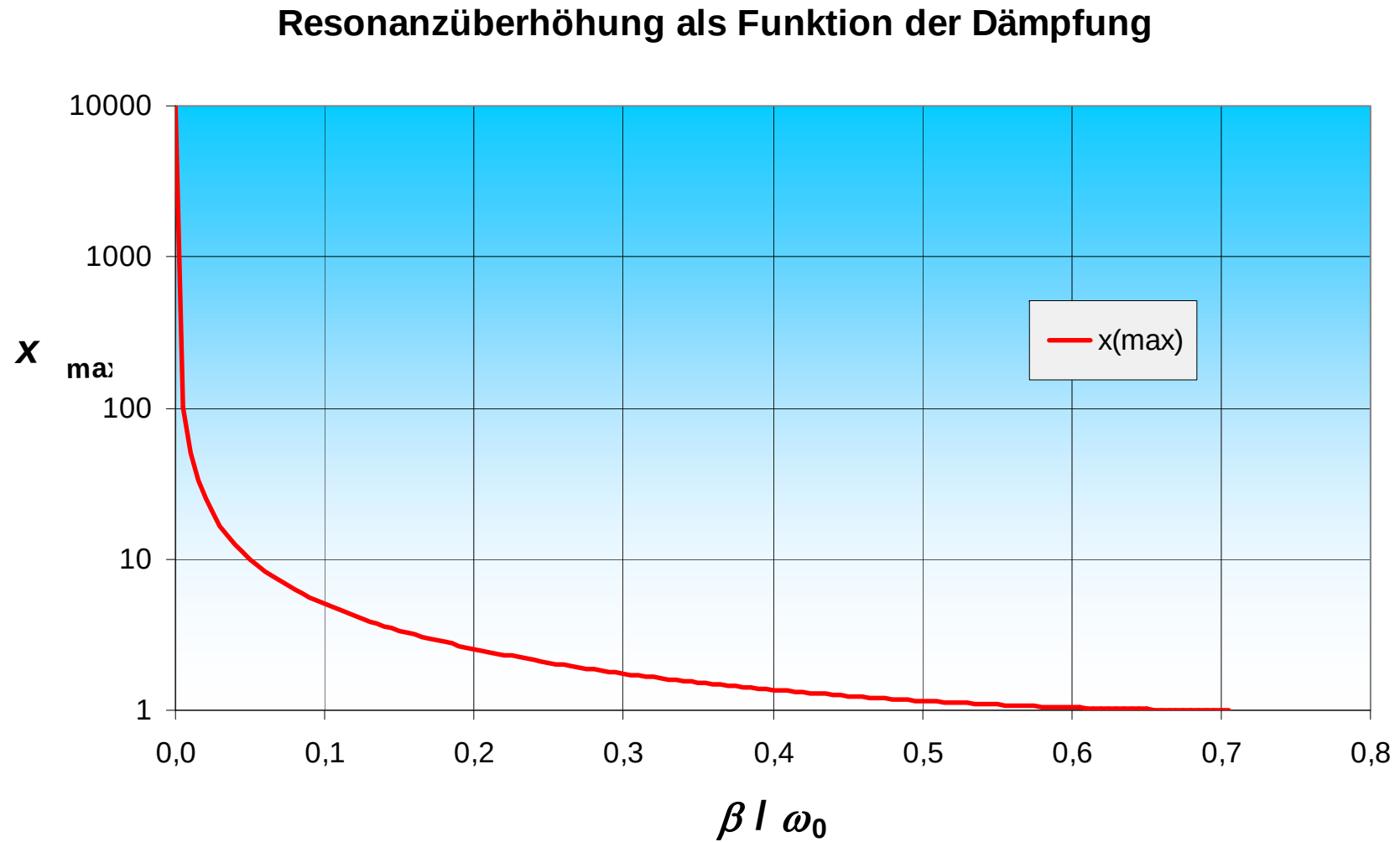
Resonanzüberhöhung $x_0^{\max}$



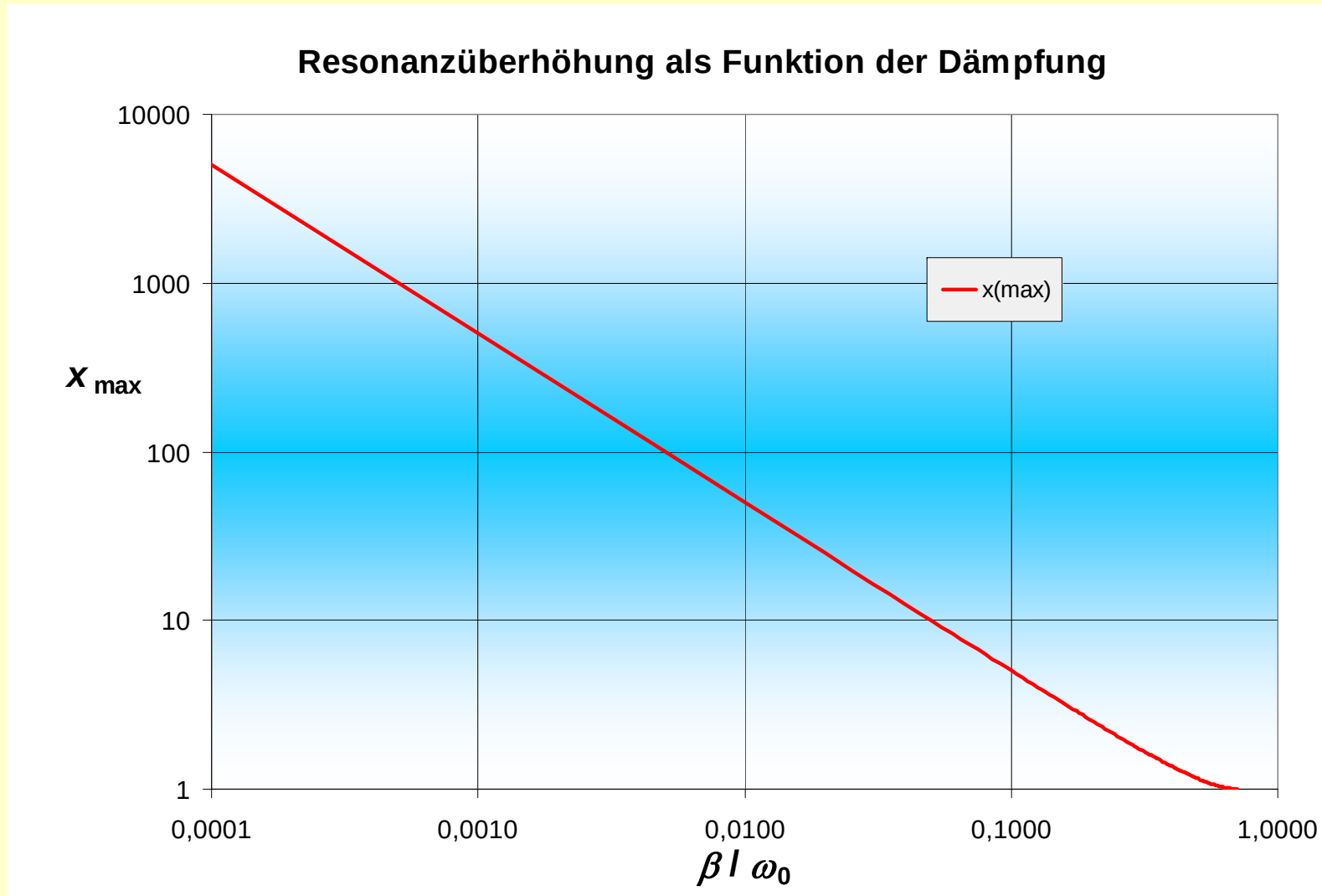
- Setzt man ω_R in die Gleichung für die Amplitude, so erhält man:

$$\begin{aligned} x_0^{\max} &= \frac{f_a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_R^2)^2 + (2\beta\omega_R)^2}} = \\ &= \frac{f_a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\beta^2)^2 + 4\beta^2(\omega_0^2 - 2\beta^2)}} = \\ &= \frac{f_a}{\sqrt{4\beta^4 + 4\beta^2\omega_0^2 - 8\beta^4}} = \frac{f_a}{\sqrt{4\beta^2\omega_0^2 - 4\beta^4}} \end{aligned}$$

Resonanzüberhöhung $x_0^{\max}$



Resonanzüberhöhung $x_0^{\max}$



Resonanzüberhöhung $x_0^{\max}$



- Bei kleiner Dämpfung wird die Resonanzüberhöhung sehr groß.
- Im Extremfall, wenn $\beta = 0$ ist, wird $x_0^{\max}$ unendlich groß (*Singularität*).

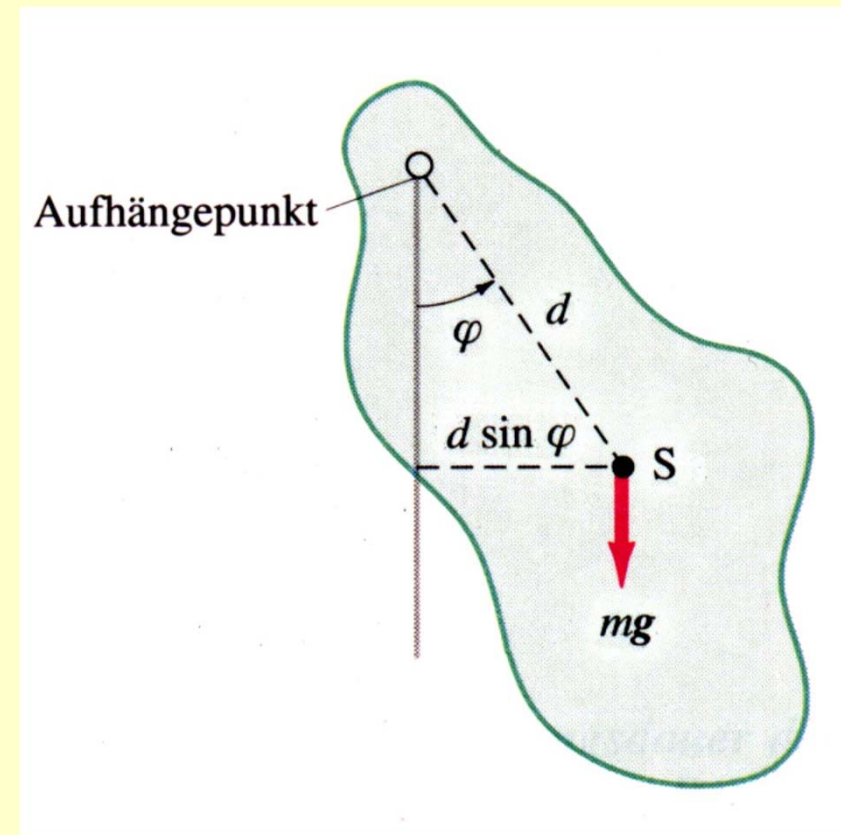
2. Schwingungen

2e. Gekoppelte Schwingungen

Gekoppelte Pendel



- Man betrachtet *zwei gleiche Pendel* (zunächst noch ohne Koppelung):
- Die Schwerkraft erzeugt das Drehmoment
- $-m g d \sin \varphi \approx -m g d \varphi$
- Zur Vereinfachung setze
- $m g d = D^*$



Gekoppeltes Pendel



- Die *Differentialgleichungen* (ohne Koppelung) lauten:

- für Pendel 1: $J\ddot{\varphi}_1 = -D^* \varphi_1$

- für Pendel 2: $J\ddot{\varphi}_2 = -D^* \varphi_2$

- Die ungekoppelten Pendel schwingen mit der *Eigenfrequenz*:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D^*}{J}}$$

Gekoppeltes Pendel



- Verbindet man die beiden Pendel durch eine Feder, so erzeugt diese ein zusätzliches Drehmoment, wenn die Auslenkungen φ_1 und φ_2 unterschiedlich sind.
- Das zusätzliche Drehmoment M_K durch die Koppelung hängt also von der Differenz $(\varphi_1 - \varphi_2)$ ab und ist bei *einem Pendel positiv* und bei dem *anderen Pendel negativ*.

- $$M_K = +/- D^+ (\varphi_1 - \varphi_2)$$

Gekoppeltes Pendel



- Differentialgleichungen mit Koppelung:
- für Pendel 1: $J \ddot{\varphi}_1 = -D^* \varphi_1 - D^+ (\varphi_1 - \varphi_2)$
- für Pendel 2: $J \ddot{\varphi}_2 = -D^* \varphi_2 + D^+ (\varphi_1 - \varphi_2)$
- Durch Addition und Subtraktion der beiden Gleichungen erhält man:

$$J (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) = -D^* (\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$J (\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2) = -(D^* + 2D^+) (\varphi_1 - \varphi_2)$$

Gekoppeltes Pendel



- Die *erste Dgl* beschreibt eine ungedämpfte Schwingung der Winkelsumme $\varphi_1 + \varphi_2$ mit der Eigenfrequenz:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D^*}{J}}$$

- Die *zweite Dgl* beschreibt eine ungedämpfte Schwingung der Winkeldifferenz $\varphi_1 - \varphi_2$ mit der Eigenfrequenz:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D^* + 2D^+}{J}}$$

Gekoppeltes Pendel



- Die allgemeine Lösung ist (wie früher gezeigt) eine *Linearkombination* aus sin und cos :

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 2a \cdot \sin \omega_0 t + 2b \cdot \cos \omega_0 t$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2a' \cdot \sin \omega_1 t + 2b' \cdot \cos \omega_1 t$$

- Durch Addition und Subtraktion erhält man:

$$\varphi_1 = a \cdot \sin \omega_0 t + b \cdot \cos \omega_0 t + a' \cdot \sin \omega_1 t + b' \cdot \cos \omega_1 t$$

$$\varphi_2 = a \cdot \sin \omega_0 t + b \cdot \cos \omega_0 t - a' \cdot \sin \omega_1 t - b' \cdot \cos \omega_1 t$$

Gekoppeltes Pendel



- Wählt man als *Anfangsbedingung*, dass für $t = 0$ beide Pendel in der Position $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ sind, folgt:

$$\varphi_1 = a \cdot \sin \omega_0 t + a' \cdot \sin \omega_1 t$$

$$\varphi_2 = a \cdot \sin \omega_0 t - a' \cdot \sin \omega_1 t$$

- Für die *Geschwindigkeiten* gilt dann:

$$\dot{\varphi}_1 = a \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 t + a' \cdot \omega_1 \cdot \cos \omega_1 t$$

$$\dot{\varphi}_2 = a \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 t - a' \cdot \omega_1 \cdot \cos \omega_1 t$$

Gleichsinnige Schwingung



- Man setze für $t = 0$: $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_0$. Beide Pendel bewegen sich mit gleicher Geschwindigkeit in die gleiche Richtung:

$$\dot{\varphi}_0 = a \omega_0 + a' \omega_1 \qquad \dot{\varphi}_0 = a \omega_0 - a' \omega_1$$

- **Lösung:**

$$a = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0} \qquad a' = 0$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t)$$

Gegensinnige Schwingung



- Man setze für $t = 0$: $\dot{\varphi}_1 = +\dot{\varphi}_0$ und $\dot{\varphi}_2 = -\dot{\varphi}_0$.
Beide Pendel bewegen sich mit entgegengerichteter gleicher Geschwindigkeit:

$$\dot{\varphi}_0 = a \omega_0 + a' \omega_1 \qquad -\dot{\varphi}_0 = a \omega_0 - a' \omega_1$$

- Lösung:** $a = 0$ $a' = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_1}$

$$\varphi_1 = \frac{\dot{\varphi}}{\omega_1} \cdot \sin(\omega_1 t) \qquad \varphi_2 = -\frac{\dot{\varphi}}{\omega_1} \cdot \sin(\omega_1 t)$$

Diskussion



- Bei der *gleichsinnigen Schwingung* bewegen sich beide Pendel so, als wenn keine Koppelung vorhanden wäre. Sie schwingen *phasengleich* mit der Eigenfrequenz ω_0 . Die Koppelung hat deshalb keine Wirkung.
- Bei der *gegensinnigen Schwingung* erfolgt die Bewegung mit der *Phasenverschiebung* π . Die Eigenfrequenz ist ω_1 . ω_1 ist größer als ω_0 .

Schwebungsschwingung



- Man setze für $t = 0$: $\dot{\varphi}_1 = +\dot{\varphi}_0$ und $\dot{\varphi}_2 = 0$.

Lösung:

$$\dot{\varphi}_0 = a \omega_0 + a' \omega_1 \qquad 0 = a \omega_0 - a' \omega_1$$

$$\frac{\dot{\varphi}_0}{2} = a \omega_0 = a' \omega_1$$

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{\dot{\varphi}_0}{2} \cdot (\cos(\omega_0 t) + \cos(\omega_1 t))$$

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{\dot{\varphi}_0}{2} \cdot (\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega_1 t))$$

Schwebungsschwingung



- Mit Hilfe der Additionstheoreme

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

- ergibt sich für die *Geschwindigkeiten*:

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_0 \cdot \cos \frac{\omega_0 + \omega_1}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_0 - \omega_1}{2} t$$

$$\dot{\varphi}_2 = -\dot{\varphi}_0 \cdot \sin \frac{\omega_0 + \omega_1}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_0 - \omega_1}{2} t$$

Schwebungsschwingung



- Da gilt: $\cos(-\alpha) = +\cos \alpha$ und $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ folgt:

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_0 \cdot \cos \frac{\omega_1 - \omega_0}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_1 + \omega_0}{2} t$$

$$\dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_0 \cdot \sin \frac{\omega_1 - \omega_0}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_1 + \omega_0}{2} t$$

- Bei schwacher Koppelung ist:

$$(\omega_1 - \omega_0) \ll (\omega_1 + \omega_0)$$

Diskussion



- Die beiden *Pendel schwingen mit der schnellen Kreisfrequenz* $(\omega_1 + \omega_0)/2$
- Die *Schwingungsamplituden werden mit der langsamen Kreisfrequenz moduliert*
 $(\omega_1 - \omega_0)/2$
- *Schwebung*

Schwebungsschwingung



- Setze $\omega_1 = \omega_0 + \varepsilon$

$$\varphi_1 = \frac{\dot{\varphi}_0}{2\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{\dot{\varphi}_0}{2\omega_1} \sin \omega_1 t = \frac{\dot{\varphi}_0}{2\omega_1} \left(\sin \omega_1 t + \frac{\omega_1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right)$$

$$= \frac{\dot{\varphi}_0}{2\omega_1} \left(\sin \omega_1 t + \left(1 + \frac{\varepsilon}{\omega_0} \right) \sin \omega_0 t \right) =$$

$$= \frac{\dot{\varphi}_0}{2\omega_1} \left((\sin \omega_1 t + \sin \omega_0 t) + \frac{\varepsilon}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) =$$

Schwebungsschwingung



- Mit Hilfe des Additionstheorems

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

- ergibt sich für die Amplitude:

$$\varphi_1 = \frac{\dot{\varphi}_0}{2\omega_1} \left(\left(2 \sin \frac{\omega_1 + \omega_0}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_1 - \omega_0}{2} t \right) + \frac{\varepsilon}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right)$$

~~ω_0~~
 ~ 0

- Wenn $\varepsilon \ll \omega_0$ gilt näherungsweise:

$$\varphi_1 = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_1} \left(\sin \frac{\omega_1 + \omega_0}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_1 - \omega_0}{2} t \right)$$

Schwebungsschwingung



- Näherungslösungen für die Amplituden φ_1 und φ_2 :

$$\varphi_1 = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_1} \cdot \left(\sin \frac{\omega_1 + \omega_0}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_1 - \omega_0}{2} t \right)$$

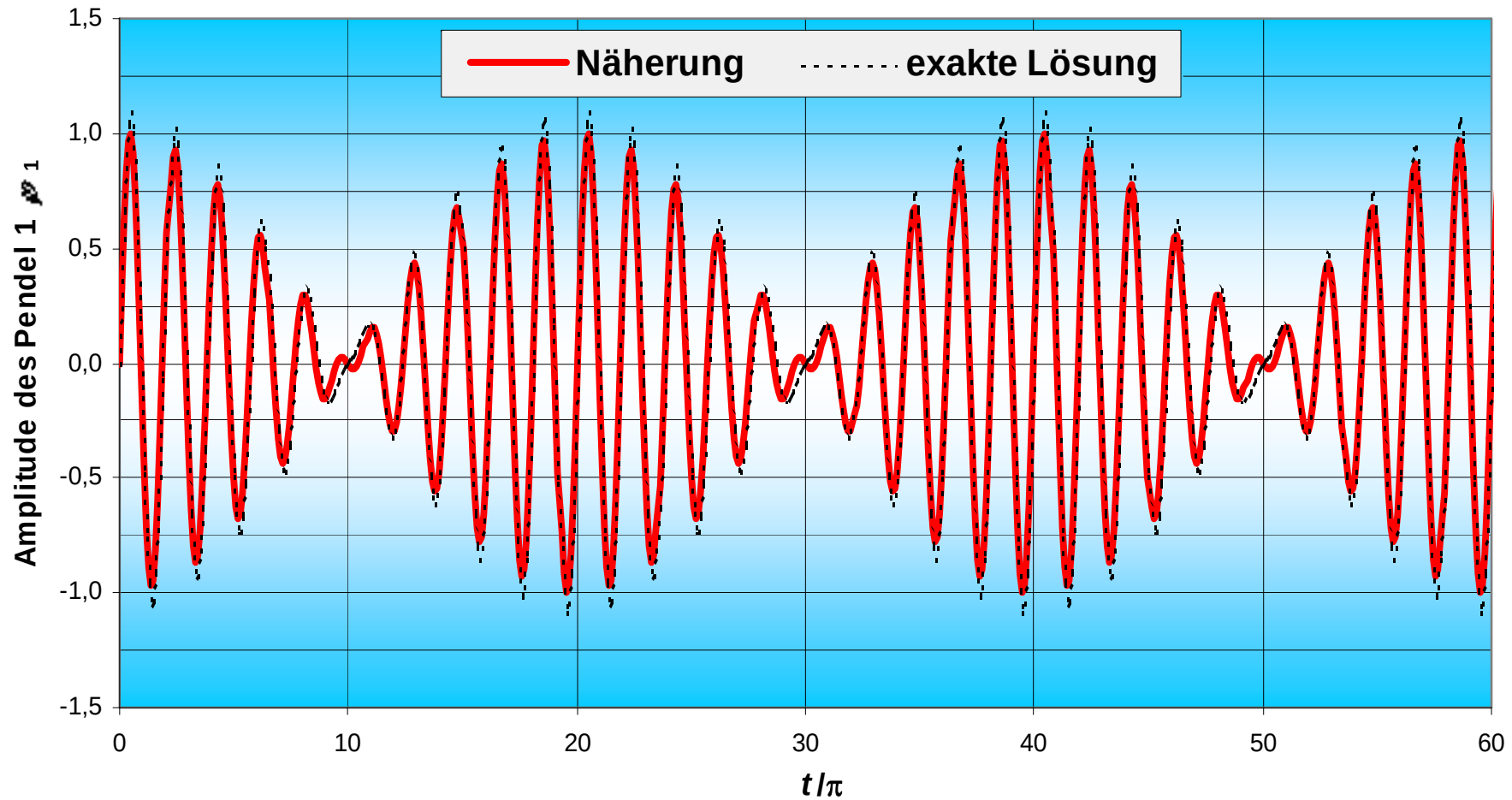
$$\varphi_2 = -\frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_1} \cdot \left(\cos \frac{\omega_1 + \omega_0}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_1 - \omega_0}{2} t \right)$$

- Die Funktionen beschreiben jeweils Schwebungen mit einer mit einer Phasenverschiebung von π .

Schwebungsschwingung



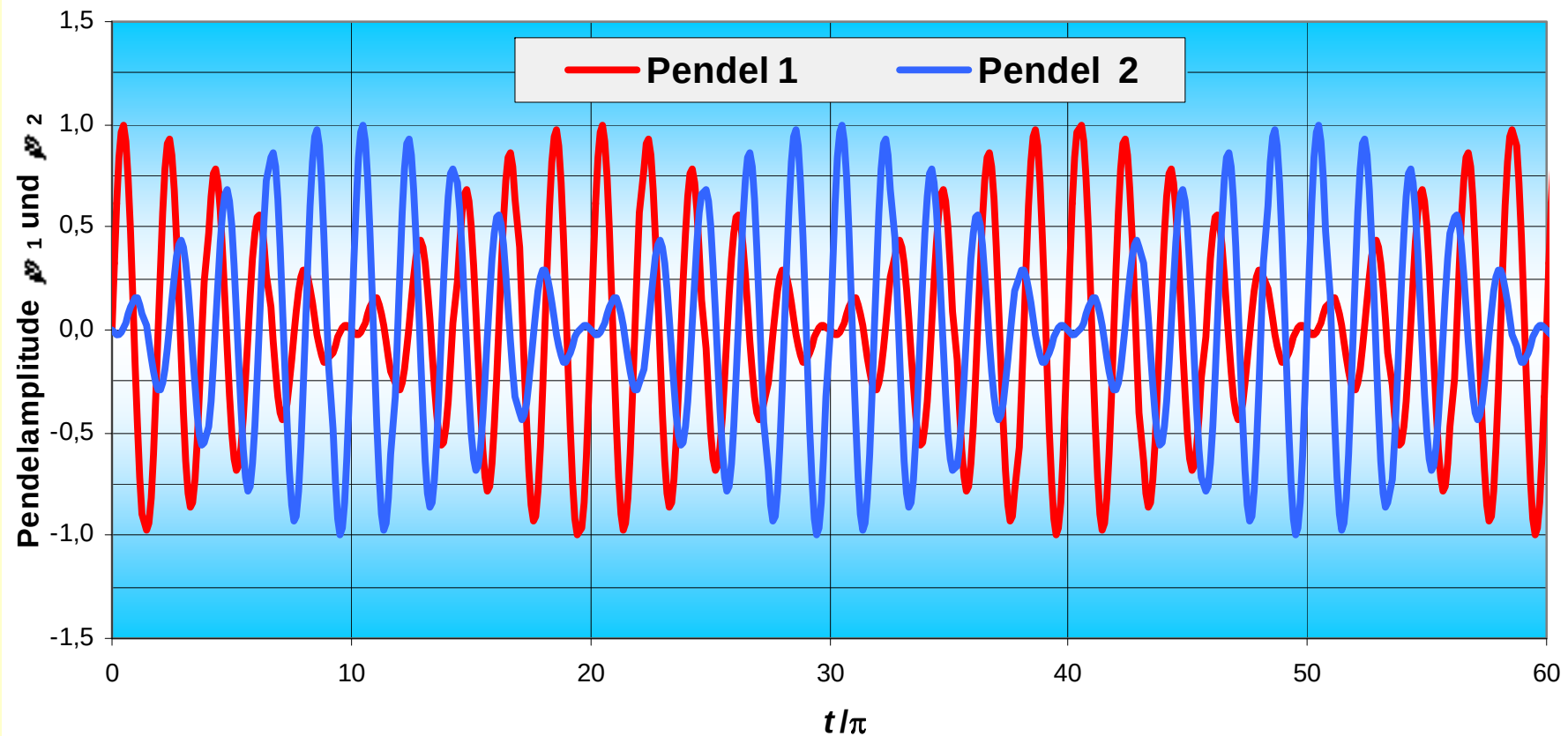
Vergleich von Näherung und exakter Lösung für $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = 1,1$



Schwebungsschwingung



Vergleich der Amplituden von Pendel 1 und Pendel 2
für $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = 1,1$



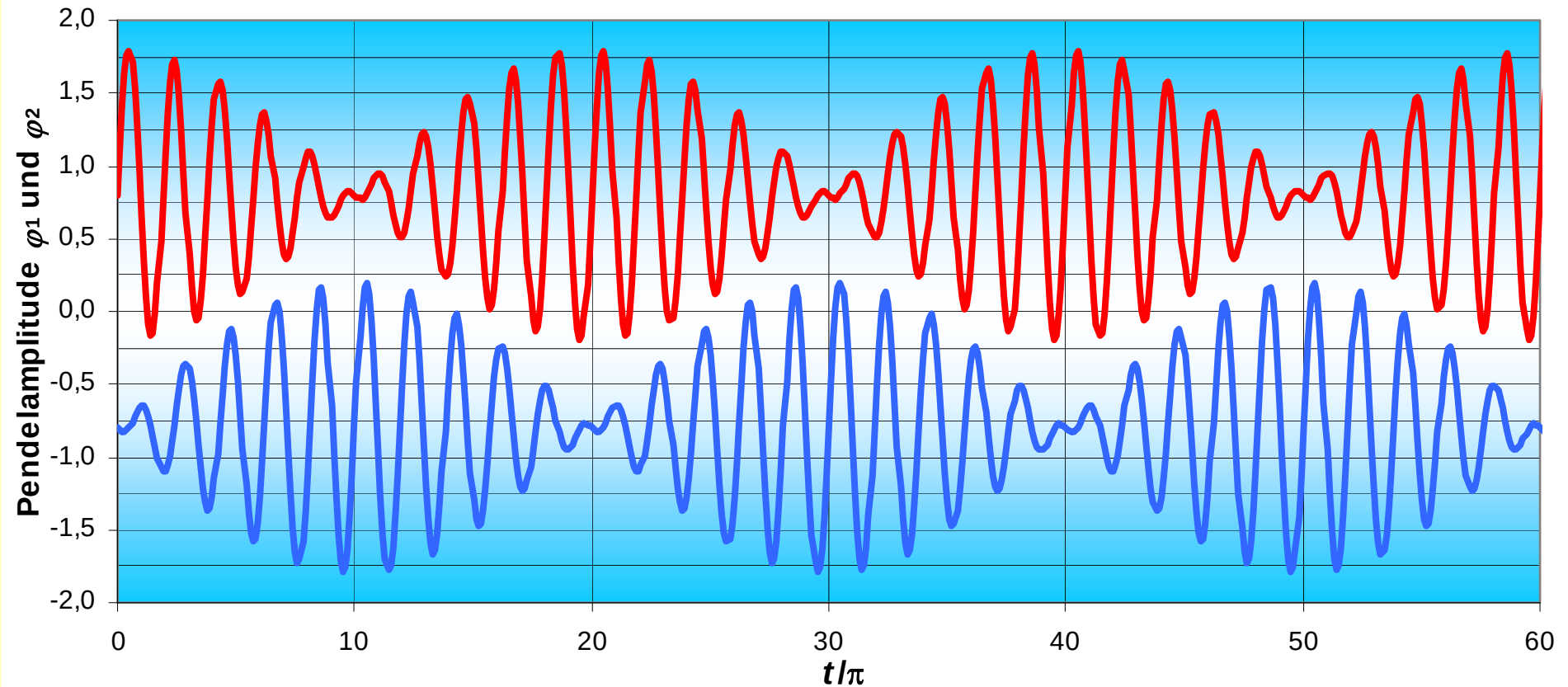
Schwebungsschwingung



Vergleich der Amplituden von Pendel 1 und Pendel 2

für $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = 1,1$

— Pendel 1 — Pendel 2



Übungsaufgabe



- Ein Gegenstand der Masse 3 kg schwingt an einer horizontalen Feder mit einer Amplitude von $A = 10 \text{ cm}$ und einer Frequenz von $f_0 = 2 \text{ Hz}$.
- a) Wie groß ist die Federkonstante? (474 N/m)
- b) Wie groß ist die Schwingungsdauer? (0,5s)
- c) Wie groß ist die höchste Geschwindigkeit?
• (1,26 m/s)
- d) Wie groß ist die stärkste Beschleunigung?
• (15,6 m/s²)
- 12.1 2

Lösung



- a) Federkonstante: $D = m \omega_0^2 = m (2\pi f_0)^2 = 474 \frac{N}{m}$
- b) Schwingungsdauer: $T = \frac{1}{f_0} = 0,5 s$
- c) d) Max. Geschwindigkeit und Beschleunigung:
- da: $x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t)$ folgt: $v(t) = \dot{x}(t) = A \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$
- $a(t) = \ddot{x}(t) = -A \omega_0^2 \cdot \sin(\omega_0 t)$

$$v_{\max} = A \cdot \omega_0 = A \cdot 2\pi \cdot f_0 = 1,26 \frac{m}{s} \quad a_{\max} = 15,79 \frac{m}{s^2}$$

Übungsaufgabe



- Ein Mensch der Masse 80 kg setze sich in ein Fahrzeug der Masse 2400 kg, worauf sich dieses durch die Federung um 2,5 cm senkt.
- Wie groß ist die Frequenz, mit der Insasse und Fahrzeug schwingen, wenn die Dämpfung vernachlässigt wird?
- ($D = 3,14 \cdot 10^4 \text{ N/m}$, $f = 0,566 \text{ s}^{-1}$)
- 12.1 4



Lösung

- Masse Fahrzeug: $m_1 = 2400 \text{ kg}$
- Masse Mensch: $m_2 = 80 \text{ kg}$
- Federweg: $x = 0,025 \text{ m}$
- Federkonstante: $D = m_2 g x^{-1} = 3,14 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}}$
- Frequenz: $f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{D}{m_1 + m_2}} = 0,566 \text{ s}^{-1}$

Übungsaufgabe



- Ein Gegenstand der Masse 3 kg führe an einer Feder mit der Federkonstanten $D = 500 \text{ N/m}$ eine harmonische Schwingung aus. Die höchste Geschwindigkeit betrage dabei 70 cm/s.
- a) Wie groß ist die Gesamtenergie der Bewegung? (0,735 J)
- b) Wie groß ist die Amplitude der Bewegung?
- (5,42 cm)

Lösung



- Maximale Geschwindigkeit:

- $v_{\max} = A \omega_0$ es folgt: $A = \frac{v_{\max}}{\omega_0}$

- Gesamtenergie:

$$E_{\text{ges}} = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} D \frac{v_{\max}^2}{D/m} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = 0,735 \text{ J}$$

- Amplitude:

$$A = \frac{v_{\max}}{\omega_0} = \frac{v_{\max}}{\sqrt{D/m}} = 0,054 \text{ m}$$

Übungsaufgabe



- Ein Gegenstand der Masse 2,5 kg hänge an einer Feder mit der Federkonstanten 600 N/m und schwingen mit einer Amplitude von 3 cm . Wie groß ist
- a) die Gesamtenergie des Systems? (0,270 J)
- b) die potentielle Energie des Gegenstandes und
- c) die potentielle Energie der Feder, wenn der Gegenstand seinen tiefsten Punkt erreicht hat?
- d) Bestimmen Sie das Maximum der kinetischen Energie. (Im Gleichgewicht sei $E_{\text{pot}} = 0$) 12.4 17
- (b) $-0,736$ J; c) 1,01 J; d) 0,270 J)

Lösung:



- a) Gesamtenergie: $E_{ges} = \frac{1}{2} D A^2 = 0,27 \text{ J}$
- b) potentielle Energie des Gegenstandes am tiefsten Punkt:
$$E_{pot} = -m g A = -0,736 \text{ J}$$
- c) potentielle Energie der Feder am tiefsten Punkt:
- Beim Anhängen des Gewichtes verlängert sich die Feder um A_0 und befindet sich dann in der Gleichgewichtslage. Am tiefsten Punkt ist die Auslenkung $A_0 + A$.

Lösung



- Die gesamte Spannarbeit an der Feder ist gleich der potentiellen Energie der Feder:

$$W_F = E_{pot}^F = \frac{1}{2} D (A_0 + A)^2$$

- Da E_{pot} in der Gleichgewichtslage Null sein soll, folgt:

$$\begin{aligned} E_{pot}^F &= \frac{1}{2} D (A_0 + A)^2 - \frac{1}{2} D A_0^2 = \frac{1}{2} D A^2 + D A_0 A = \\ &= \frac{1}{2} D A^2 + m g A = 0,270 J + 0,735 J = 1,005 J \end{aligned}$$

Lösung



- d) Maximale kinetische Energie:

$$E_{kin}^{\max} = E_{ges} = 0,270 \text{ J}$$

Übungsaufgabe



- a) Wie groß ist die Erdbeschleunigung, wenn die Schwingungsdauer eines 70 cm langen (mathematischen) Pendels 1,68 s beträgt?

12.5 19

- (9,79 m/s²)
- b) Ein Pendel mit einer schweren Masse und einer Pendellänge von 34 m sei in einem Gebäude aufgehängt. Wie groß ist die Schwingungsdauer, wenn $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ beträgt?

12. 5 20

- ($T = 11,7 \text{ s}$)

Lösung



- a) Erdbeschleunigung:

$$g = \omega_0^2 l = (2\pi f)^2 \cdot l = \frac{4\pi^2 \cdot l}{T^2} = 9,79 \frac{m}{s^2}$$

- b) Schwingungsdauer:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 11,7 \text{ s}$$

Übungsaufgabe



- Ein Gegenstand der Masse $m = 2 \text{ kg}$ schwingt an einer Feder mit der Federkonstanten $D = 400 \text{ N/m}$. Die Dämpfungskonstante sei $b = 2 \text{ kg/s}$. Auf das System wirke eine sinusförmige antreibende Kraft, deren höchster Wert $F_a = 10 \text{ N}$ betrage und deren Kreisfrequenz $\omega_a = 10 \text{ s}^{-1}$ sei.
- a) Wie groß ist die Amplitude der Schwingung?
(0,354 m)
- b) Bestimmen Sie die Resonanzfrequenz und die Amplitude im Resonanzfall?
(14,1 s^{-1})

Lösung



- Eigenfrequenz des ungedämpften System und Dämpfungskonstante:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = 14,142 \text{ s}^{-1} \quad \beta = \frac{b}{2m} = 0,5 \text{ s}^{-1}$$

- Amplitude:

$$x_{\max} = \frac{F_a / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_a^2)^2 - (2\beta\omega_a)^2}} = 0,0498 \text{ m}$$

Lösung



- Resonanzfrequenz:

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{199} \text{ s}^{-1} \cong \sqrt{200} \text{ s}^{-1} = \omega_0$$

- Resonanzamplitude: (für: $\beta < \omega_0$)

$$x_R^{\max} = \frac{f_a}{\sqrt{4\beta^2\omega_0^2 - 4\beta^4}} = \frac{f_a}{\sqrt{4\beta^2 \cdot (\omega_0^2 - \beta^2)}} \approx \frac{f_a}{2\beta\omega_0}$$

$$x_R^{\max} \approx \frac{f_a}{2\beta\omega_0} = \frac{F_a m}{m 2b\omega_0} = \frac{F_a}{2b\omega_0} = 0,354 \text{ m}$$

Übungsaufgabe



- Ein mathematisches Pendel mit der Länge l werde um φ_0 ausgelenkt.
- a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit beim Passieren der Gleichgewichtslage $\varphi = 0$ aus den Formeln der harmonischen Schwingung.
- b) Berechnen sie die Geschwindigkeit mit Hilfe des Energiesatzes.
- c) Vergleichen Sie die Ergebnisse.

Lösung



- Harmonische Schwingung:

$$v_{\max} = A \cdot \omega_0 = l \varphi_{\max} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{g l} \cdot \varphi_{\max}$$

- Energiesatz:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = m g h = m g l \cdot (1 - \cos \varphi_{\max})$$

$$\begin{aligned} v_{\max} &= \sqrt{g l \cdot 2(1 - \cos \varphi_{\max})} \approx \sqrt{g l \cdot 2 \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2} \varphi_{\max}^2 \right) \right)} = \\ &= \sqrt{g l} \cdot \varphi_{\max} \end{aligned}$$

Lösung



- Vergleich:

$$R = \frac{v_{\max}^{\text{harm}}}{v_{\max}^{\text{exakt}}} = \frac{\sqrt{g l} \cdot \varphi_{\max}}{\sqrt{g l \cdot 2(1 - \cos \varphi_{\max})}} = \frac{\varphi_{\max}}{\sqrt{2(1 - \cos \varphi_{\max})}}$$

$\varphi_{\max} / ^\circ$	R
10	1,001
20	1,005
30	1,012
40	1,021
50	1,032
60	1,047
70	1,065
80	1,086
90	1,111

Übungsaufgabe



- Ein dünner Reifen mit einem Radius von 50 cm hänge an einem dünnen waagerechten Stab, so dass er in der Reifenebene schwingen kann.
- Berechnen Sie die Schwingungsdauer. (2,01 s)

Lösung



- Tragheitsmoment:

$$J_{ges} = J_S + m r^2$$

- Schwingungsdauer:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J_{ges}}{m g r}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2mr^2}{m g r}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2r}{g}} = 2,006 \text{ s}$$

Übungsaufgabe



- Ein physikalisches Pendel schwingt mit einer Schwingungsdauer T um eine Drehachse D_1 . Der Abstand zwischen Drehachse und Schwerpunkt S betrage h_1 . Auf der anderen Seite des Schwerpunktes soll auf der Verbindungslinie von D_1 und S ein Drehpunkt liegen, für den die gleiche Schwingungsdauer ermittelt wird.
- Bestimmen Sie $h_1 + h_2$ aus der Schwingungsdauer T .

Lösung



- Bei gleicher Schwingungsdauer gilt: $\omega_0^1 = \omega_0^2$

$$\sqrt{\frac{m g h_1}{J_S + m h_1^2}} = \sqrt{\frac{m g h_2}{J_S + m h_2^2}}$$

- Nach Umformung folgt:

$$J_S = m h_1 h_2$$

Lösung



- Das gesamte Trägheitsmoment ist also:

$$J_{ges} = J_S + m h_1^2 = m h_1 h_2 + m h_1^2 = m h_1 (h_2 + h_1)$$

- Für die Schwingungsdauer gilt:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m h_1 \cdot (h_1 + h_2)}{m g h_1}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{h_1 + h_2}{g}}$$

$$h_1 + h_2 = \frac{g T^2}{4\pi^2}$$

Übungsaufgabe



- Eine Kugel der Masse m und dem Radius r schwingt an einem Faden der Länge l .
- a) Berechnen Sie die Schwingungsdauer T_p , indem Sie die Kugel als physikalisches Pendel behandeln.
- b) Vergleichen Sie die T_p mit der Schwingungsdauer T_m , die sich für ein mathematisches Pendel ergibt.

Lösung

- Physikalisches Pendel:
- Abstand Schwerpunkt – Drehpunkt: l
- Radius der Kugel: r

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J_{ges}}{m g l}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m l^2 + \frac{2}{5} m r^2}{m g l}}$$

$$= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{5} \left(\frac{r}{l}\right)^2}$$

Lösung

- Mathematisches Pendel: $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$
- Vergleich:

r/l	R
0,05	1,000
0,10	0,998
0,20	0,992
0,40	0,969
0,50	0,953
0,70	0,914
0,80	0,892
1,00	0,845

$$R = \frac{T_{math}}{T_{phys}} = \left(1 + \frac{2}{5} \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Übungsaufgabe



- Die Eigenkreisfrequenz ω_e eines gedämpften Oszillators sei 10% kleiner als die Eigenfrequenz des ungedämpften Systems.
- a) Um welchen Faktor verringert sich die Amplitude pro Periode? (0,0477)
- b) Um welchen Faktor verringert sich die Energie pro Periode? (0,0022)
- c) Bestimmen Sie die Resonanzfrequenz und die Resonanzüberhöhung.

Lösung



- Eigenfrequenz: $\omega_e^2 = \omega_0^2 - \beta^2 = (0,9 \cdot \omega_0)^2$
- Dämpfungskonst.: $\beta = \sqrt{\omega_0^2 - 0,9 \omega_0^2} = 0,4359 \cdot \omega_0$
- Amplitudenabnahme:

$$\frac{A((n+1) \cdot T)}{A(n \cdot T)} = e^{-\beta T} = e^{-\frac{\beta \cdot 2\pi}{\omega_e}} = e^{-\frac{0,4359 \cdot 2\pi}{0,9}} = 0,04768$$

Lösung



- Energieabnahme:

$$\frac{E((n+1) \cdot T)}{E(n \cdot T)} = \left(\frac{A((n+1) \cdot T)}{A(n \cdot T)} \right)^2 = (0,04768)^2 = 0,00227$$

- Resonanzfrequenz:

$$\omega_R^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2 = \omega_0^2 - 2 \cdot 0,19 \cdot \omega_0^2 = 0,62 \cdot \omega_0^2$$

$$\omega_R = 0,787 \cdot \omega_0$$

Lösung



- Resonanzüberhöhung:

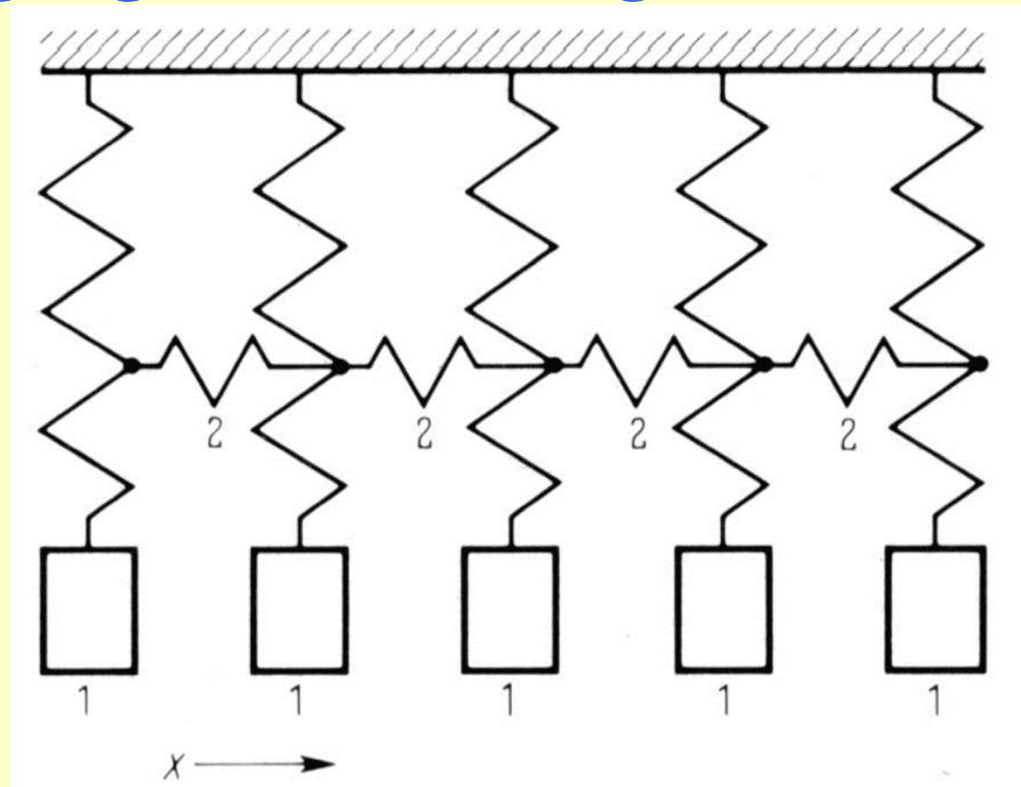
$$\begin{aligned} X_R^{\max} &= \frac{f_a}{\sqrt{4\beta^2\omega_0^2 - 4\beta^4}} = \frac{f_a}{\sqrt{4 \cdot 0,62 \cdot \omega_0^4 - 4 \cdot (0,62)^2 \cdot \omega_0^4}} = \\ &= \frac{f_a}{\omega_0^2 \cdot 0,9708} = \frac{F_a \cdot m}{m \cdot D} \cdot 1,03 = 1,03 \frac{F_a}{D} \end{aligned}$$

3. Wellen

Wellenmodell



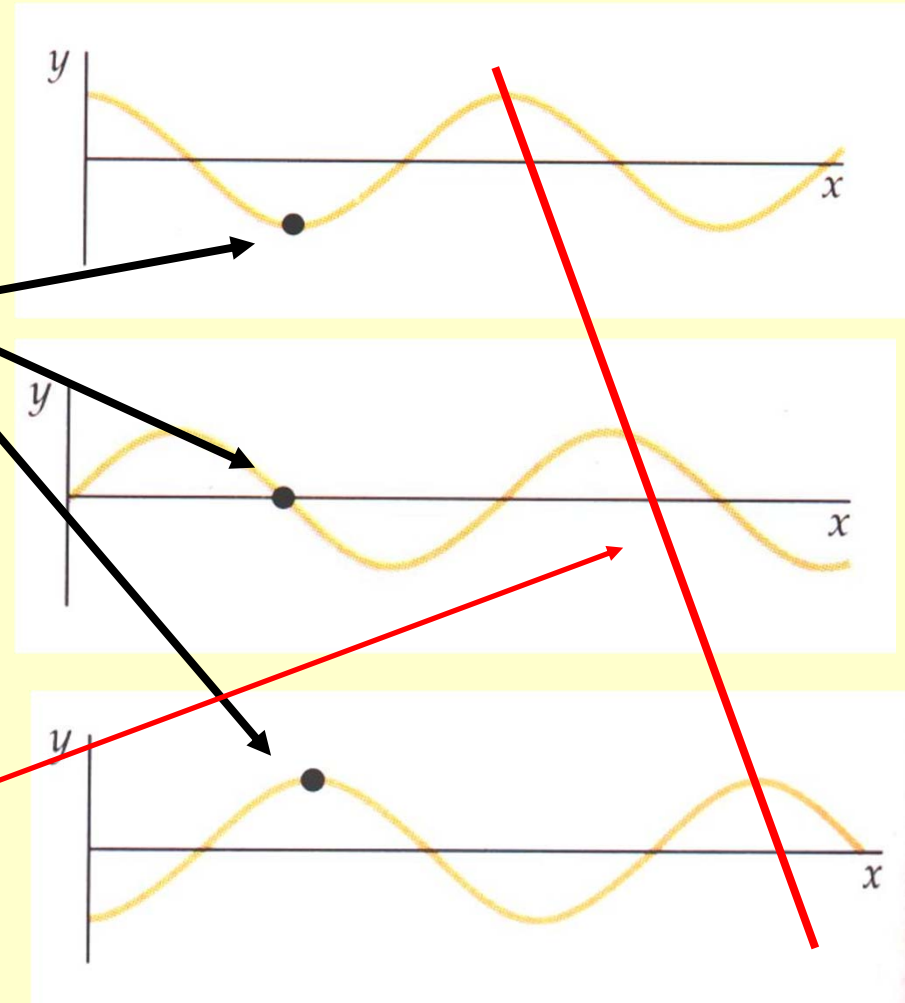
- Eine Reihe von **gleichen** Federpendeln sei durch weitere **gleiche** Federn *gekoppelt*. Setzt man ein Pendel in Schwingungen, so übertragen die Kopplungsfedern diese auf die anderen Pendel.
- **Alle Pendel sind gleichberechtigt.**



Wandernde Wellen



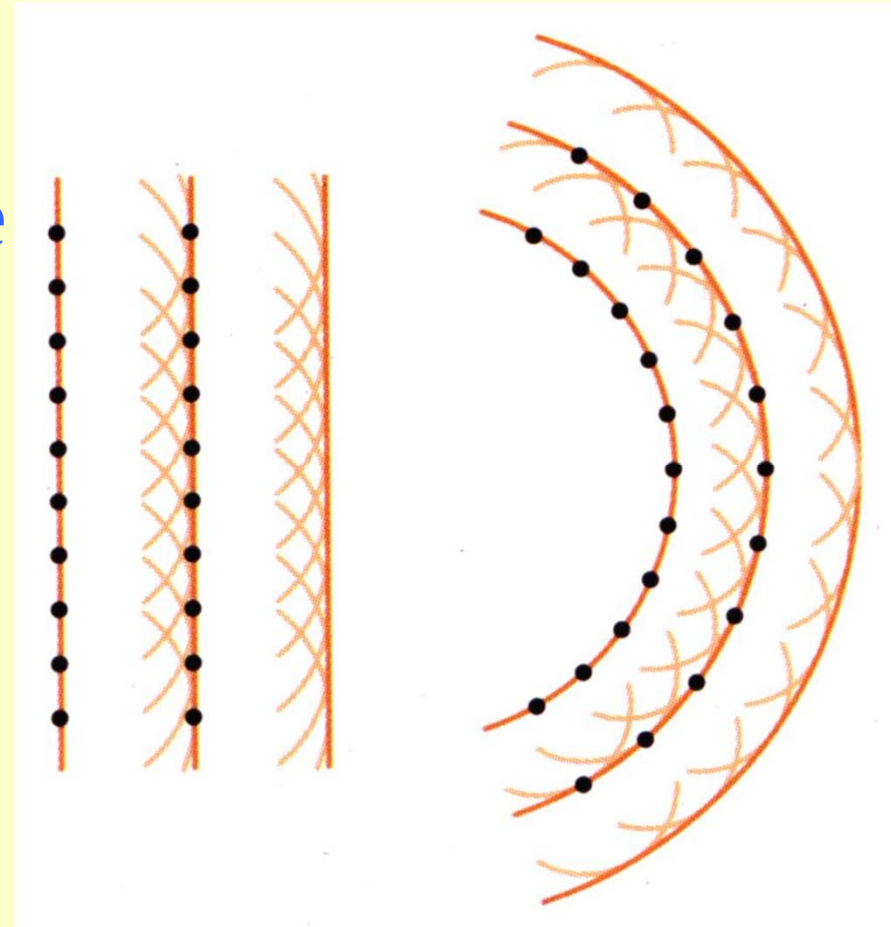
- Abbildung einer wandernden Welle:
- Der **Massenpunkt** führt eine *harmonische Schwingung* in y –Richtung aus.
- Der **Wellenberg** wandert nach rechts.



Huygens-Fresnelsches Prinzip

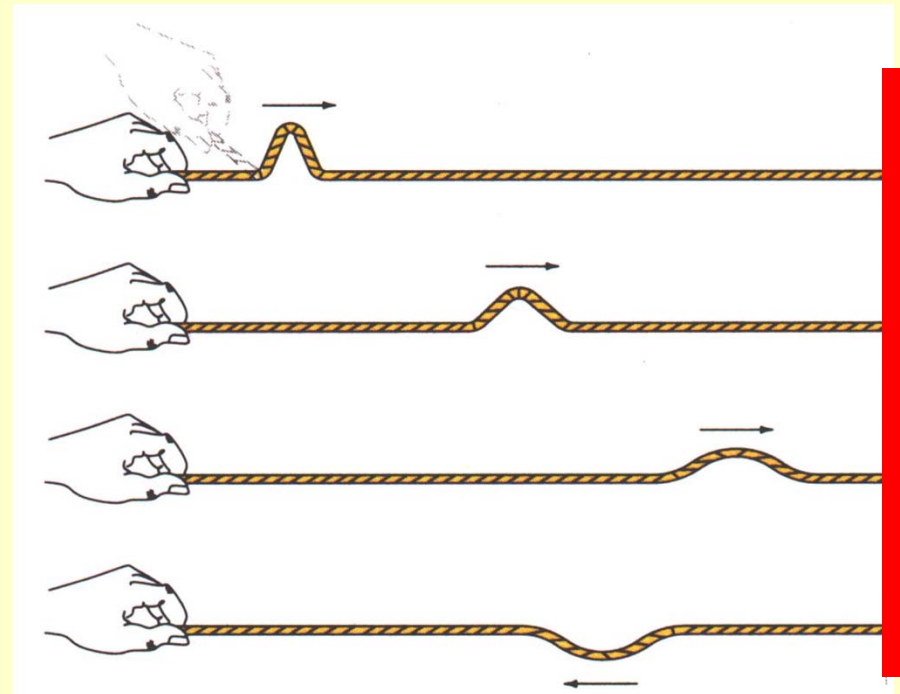


- Jeder Punkt eines Mediums, der von einer Welle erfasst wird, wird selbst Ausgangspunkt einer (kugelförmigen) *Elementarwelle*.
- Die Einhüllende ergibt die *Wellenfront*.



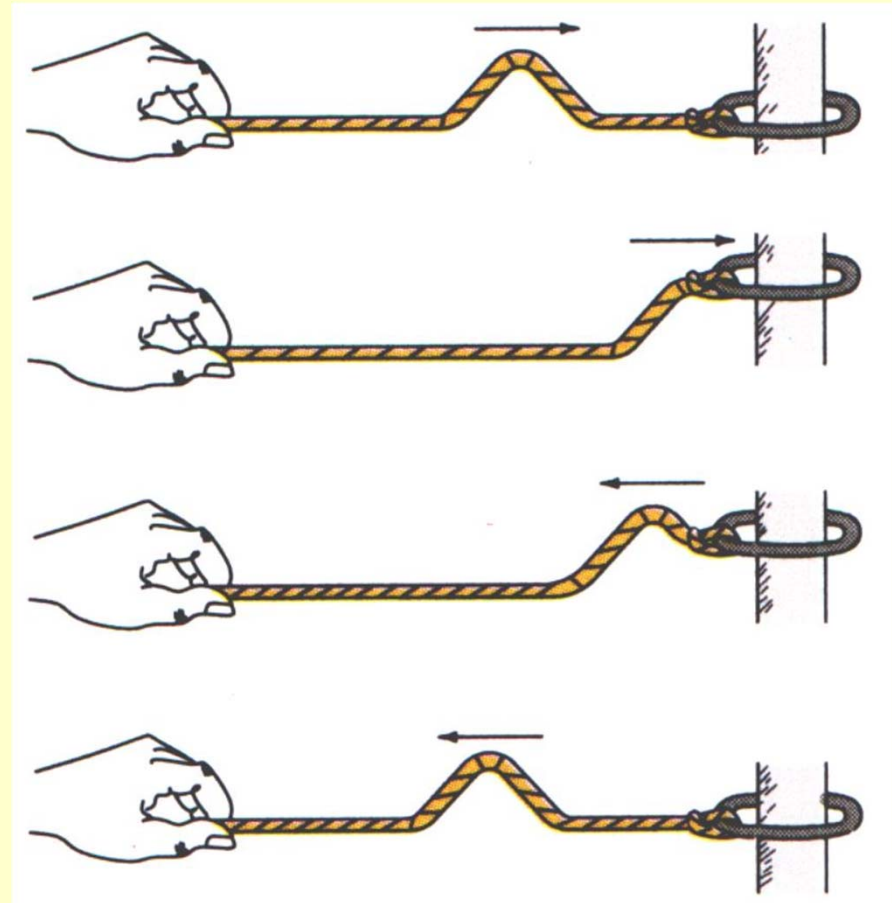
Ausbreitung von Wellenbergen

- Bewegt sich ein Wellenberg entlang eines Seils nach rechts, so wird er am Befestigungspunkt *reflektiert* und *invertiert*.
- **Phasensprung**
- Wellenberge können mit der Zeit die **Breite** ändern.
- **Dispersion**
- soll zunächst vernachlässigt werden



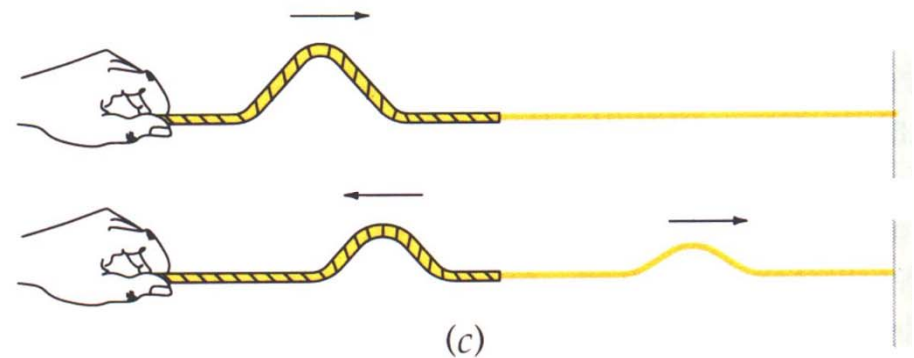
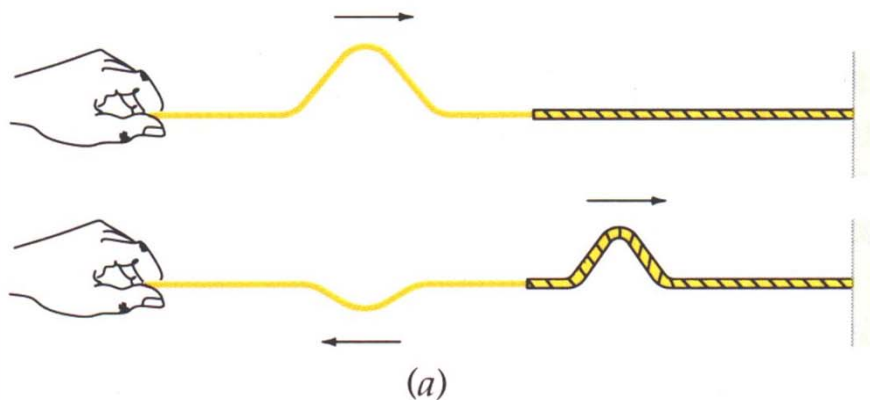
Ausbreitung von Wellenbergen -

- An einem losen Seilende wird die Welle *ohne Inversion* reflektiert.
- *Kein Phasensprung*

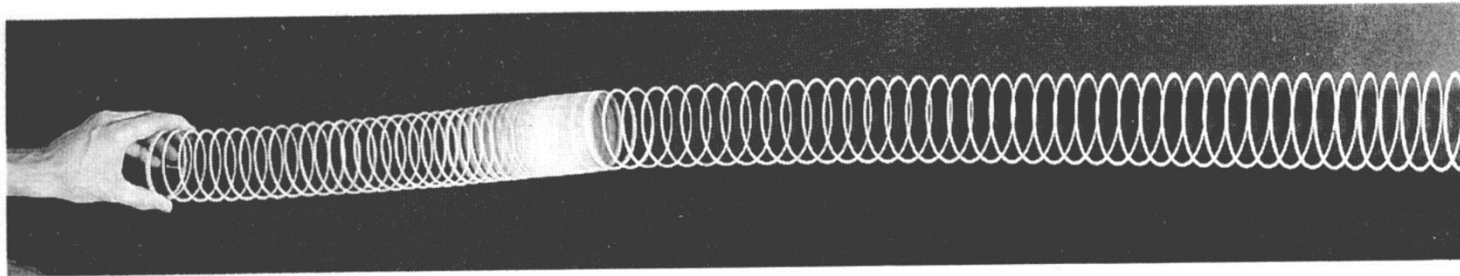


Ausbreitung von Wellenbergen

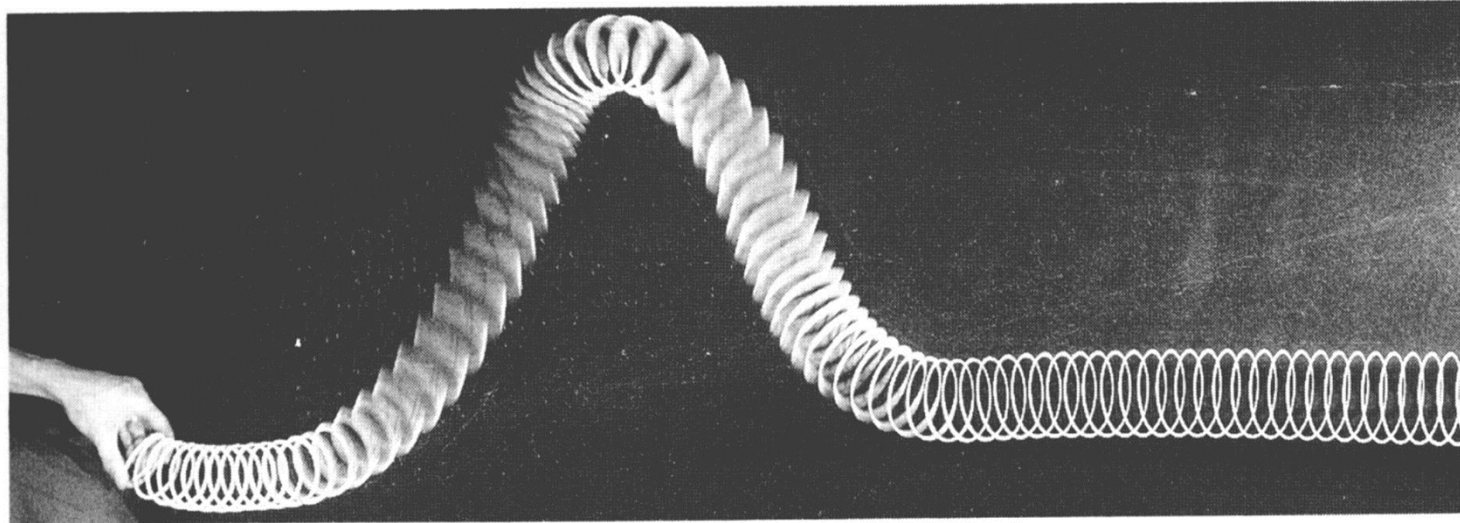
- Verbindung zweier Seile mit *unterschiedlicher Massenbelegung*:
- a) *leichtes* => *schweres Seil*: Reflektion mit Inversion und Weiterleitung
- c) *schweres* => *leichtes Seil*: Reflektion ohne Inversion und Weiterleitung



Longitudinale Wellen (a) Transversale Wellen (b)



(a)

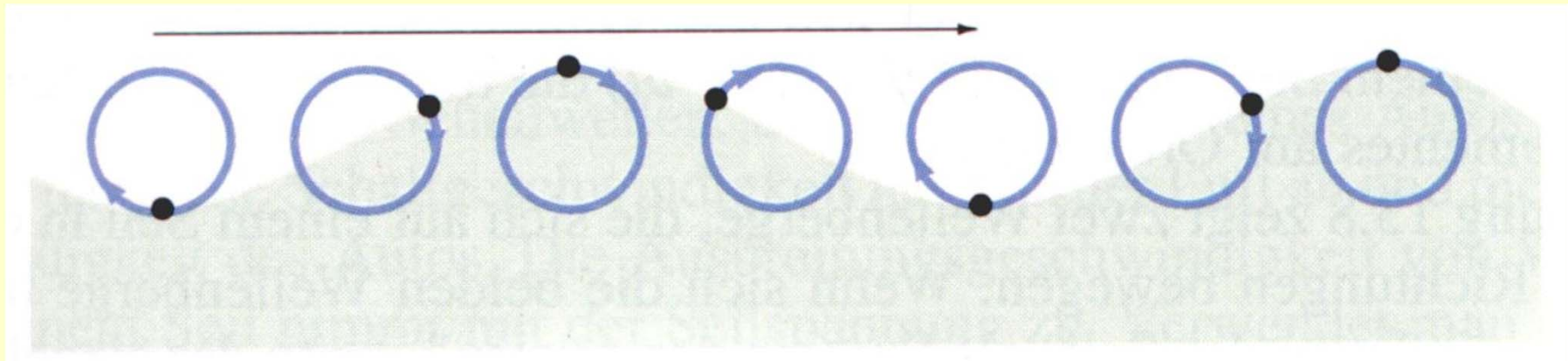


(b)

Oberflächenwellen



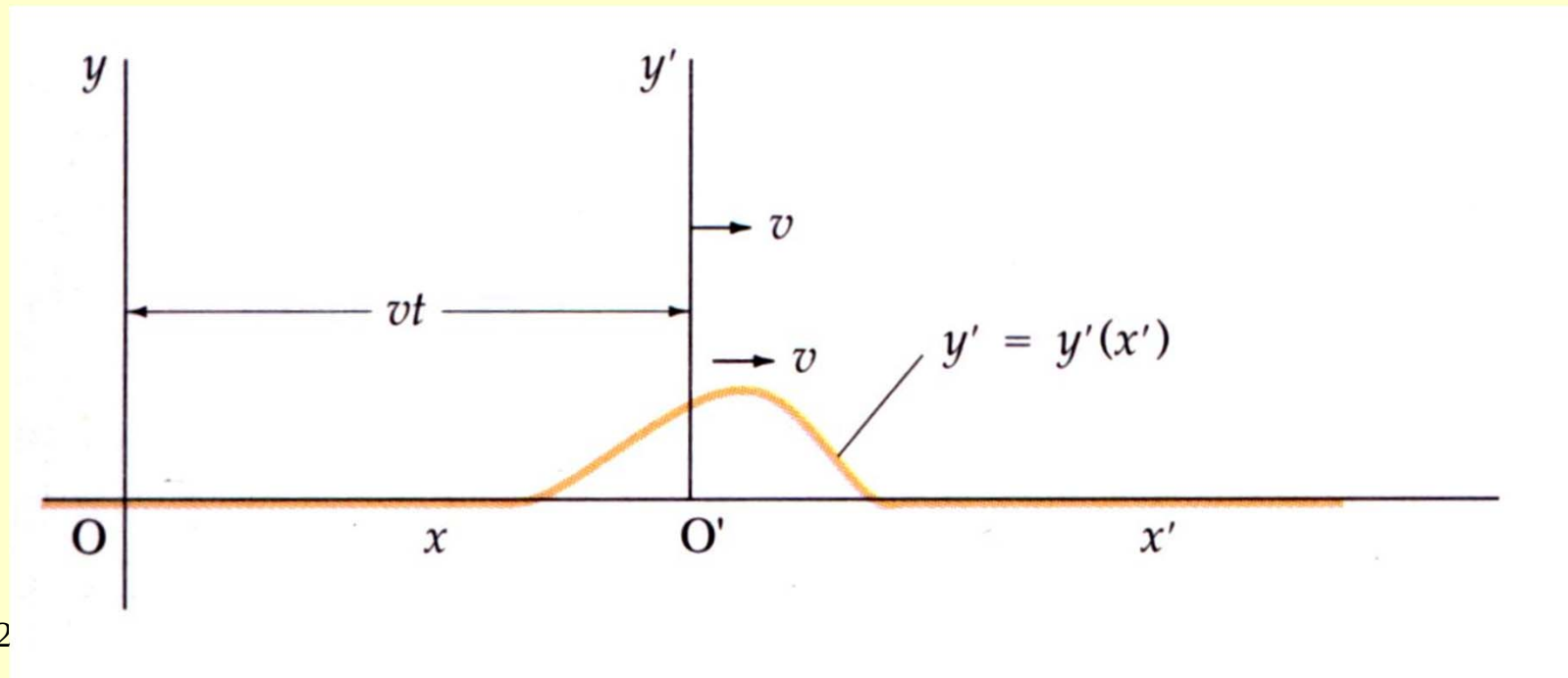
- Oberflächenwellen auf einer Flüssigkeit.
- Die Flüssigkeitsteilchen bewegen sich auf *Kreisbahnen*.
- Die Bewegung enthält sowohl *longitudinale* als auch *transversale* Komponenten.



Wellenfunktion



- Das Koordinatensystem y' bewege sich *mit der Welle*. Seine Verschiebung bezüglich y ist: $v \cdot t$
- Bezüglich y' gilt: $y' = y'(x')$
- Bezüglich y gilt: $y = y(x - v \cdot t)$



Wellenfunktion



- Die *Wellenfunktion* $y = y(x, t)$ hängt vom Ort x und von der Zeit t ab.

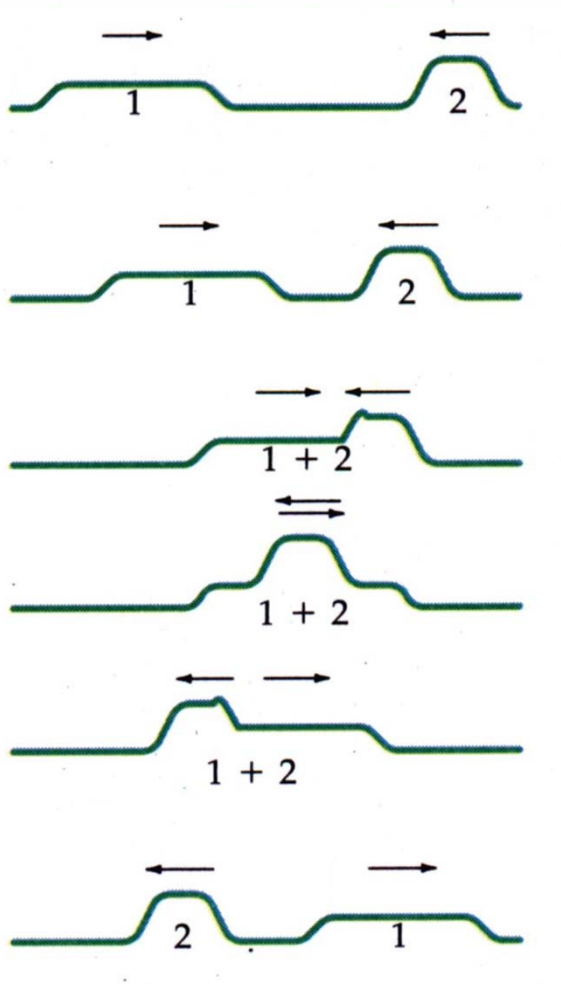
- Welle bewegt sich nach rechts:

$$y(x, t) = y(x - v \cdot t)$$

- Welle bewegt sich nach links:

$$y(x, t) = y(x + v \cdot t)$$

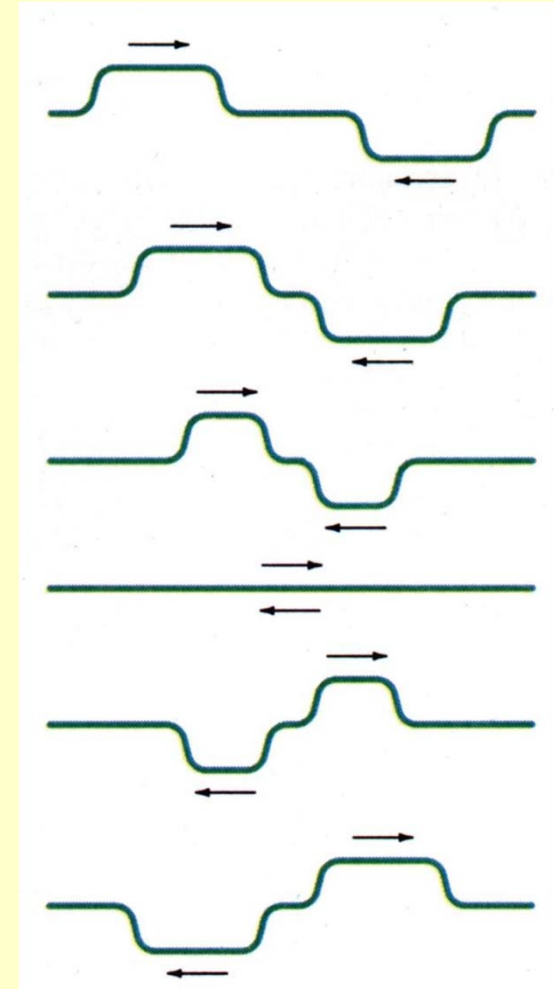
Superpositionsprinzip



Gleichgerichtetet
Auslenkung:
Verstärkung



Entgegengesetzte
Auslenkung
Auslöschung



Superpositionsprinzip



- Die nach *rechts* laufende Welle wird beschrieben durch:

$$y_1(x, t) = y_1(x - v \cdot t)$$

- Die nach *links* laufende Welle wird beschrieben durch:

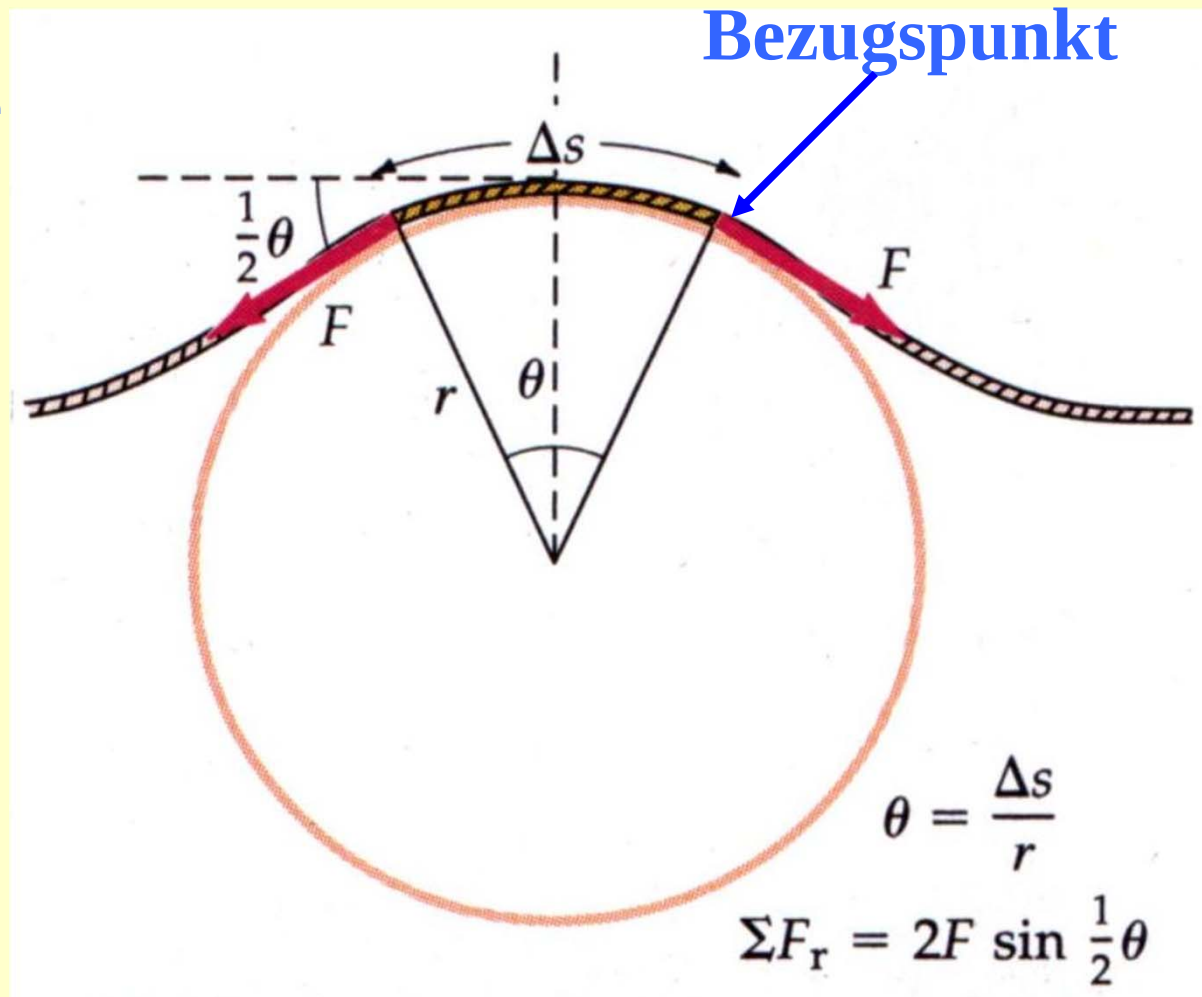
$$y_2(x, t) = y_2(x + v \cdot t)$$

- Die *Gesamtwellenfunktion* lautet:

$$y(x, t) = y_1(x - v \cdot t) + y_2(x + v \cdot t)$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit

- Läuft eine Welle von *links nach rechts*, so bewegt sich in dem mitbewegten Bezugssystem das Seil von *rechts nach links*.



Ausbreitungsgeschwindigkeit

- Der Bezugspunkt läuft auf dem Kreis mit Radius r die Strecke Δs und erfährt die Zentripetalbeschleunigung v^2/r . Es gilt: $\theta = \frac{\Delta s}{r}$
- Auf die Strecke Δs wirken rechts und links gleich große, entgegengesetzte Zugkräfte F und $-F$.
- Die **Horizontalkomponenten** heben sich auf, die **Summe der Vertikalkomponenten** liefert die Zentripetalbeschleunigung in Richtung auf den Kreismittelpunkt.

Ausbreitungsgeschwindigkeit

- Für die Resultierende gilt:

$$F_R = \sum F_t = 2F \cdot \sin \frac{\theta}{2} \approx 2F \cdot \frac{\theta}{2} = F \cdot \theta$$

- Die Resultierende erzeugt die Zentripetalbeschleunigung:

$$F_R = \Delta m \frac{v^2}{r} = F \cdot \theta$$

- Für die Masse kann man alternativ schreiben:

- $\Delta m = \mu \Delta s = \mu r \theta$ **bzw.** $\Delta m = \rho A \Delta s = \rho A r \theta$

Ausbreitungsgeschwindigkeit

- $\mu = m/l =$ Massenbelegung (Masse pro Länge)
- $A =$ Querschnittsfläche
- $\rho =$ Dichte
- $\sigma = F/A =$ Spannung (Kraft pro Querschnittsfläche)

$$F_R = \Delta m \frac{v^2}{r} = F \theta = \mu r \theta \frac{v^2}{r} = \rho A r \theta \frac{v^2}{r}$$

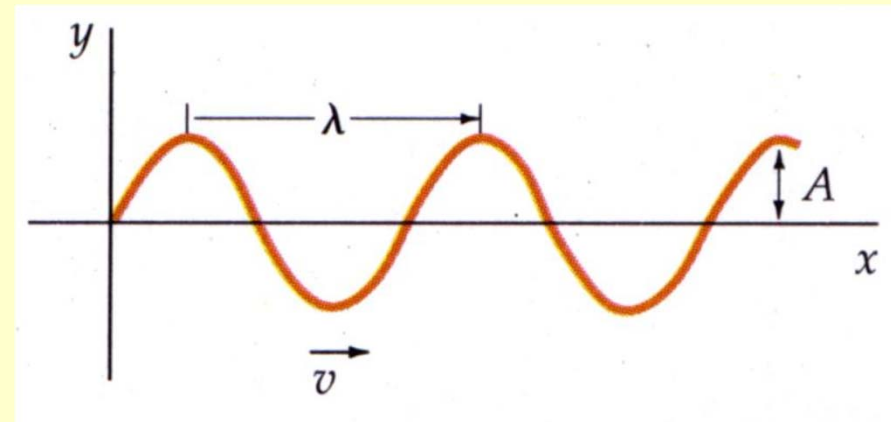
$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$$

Harmonische Wellen



- Wird eine Saite mit einer harmonischen Schwingung erregt, so breitet sich eine sinusförmige, *harmonische Welle* aus. Der Abstand zwischen zwei Wellenkämmen heißt *Wellenlänge* λ . Während der *Schwingungsdauer* T bewegt sich die Welle um λ weiter. Die Geschwindigkeit ist also:

$$v = \frac{\lambda}{T} = f \cdot \lambda$$



Harmonische Wellen



- v = (Phasen-)Geschwindigkeit der Welle
- λ = Wellenlänge
- T = Schwingungsdauer
- f = Frequenz
- $y(x) = A \cdot \sin(k x)$ = Auslenkung der Saite
- A = Amplitude
- $k = 2\pi / \lambda$ = Wellenzahl

Harmonische Wellen



- Zur Beschreibung einer *bewegten Welle* verwendet man:

$$y(x, t) = A \cdot \sin(k(x - v t)) = A \cdot \sin(k x - k v t)$$

$$y(x, t) = A \cdot \sin(k x - \omega t)$$

- $\omega = k v = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ = Kreisfrequenz

- Es gilt: $v = \frac{\omega}{k} = f \lambda$

Energieübertragung



- Ein Massenstück Δm der Saite schwingt mit der Federkonstante D . Die Gesamtenergie ist: $\frac{1}{2} D A^2$

- Da $\omega = \sqrt{\frac{D}{\Delta m}}$ folgt: $D = \Delta m \cdot \omega^2$

- Für ein Massenstück: $\Delta m = \mu \cdot \Delta x$ gilt also:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \cdot \Delta m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \Delta x = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 v \Delta t$$

Leistung



- Für die von der Welle *übertragene Leistung* erhält man also:

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 v$$

- Die *übertragene Leistung* also proportional zum Quadrat der *Frequenz* ω^2 , zum Quadrat der *Amplitude* A^2 und direkt proportional zur *Phasengeschwindigkeit* v .



Interferenz

- Die *Superposition* von Wellen bezeichnet man als *Interferenz*. Sie hängt vom *Phasen-* (Gang-)-*Unterschied* der überlagerten Wellen ab.
- Für die Wellenfunktion $y_1 = A \cdot \sin(kx - \omega t)$
- ist $kx - \omega t$ die *Phase* der Welle.
- Für eine zweite Welle $y_2 = A \cdot \sin(kx - \omega t + \delta)$
- bezeichnet δ die *Phasenkonstante* (= Differenz der Phasen).

Interferenz



- Falls die Phasenkonstante $\delta = 0$, gilt:

$$y_1 + y_2 = 2 \cdot A \sin(kx - \omega t)$$

- Die *Amplitude* wird *verdoppelt*:
- ***konstruktive Interferenz.***

- Falls Phasenkonstante $\delta = \pi$, gilt:

$$y_1 + y_2 = 0$$

- Die *Amplitude* ist *Null*:
- ***destruktive Interferenz***

Interferenz



- Für eine beliebige Phasendifferenz δ gilt:

$$y_1 + y_2 = 2A \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\delta\right) \cdot \sin\left(kx - \omega t + \frac{1}{2}\delta\right)$$

- Beweis mit Hilfe des Additionstheorems:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$\alpha = kx - \omega t$$

$$\beta = kx - \omega t + \delta$$

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = -\frac{1}{2}\delta$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = kx - \omega t + \frac{1}{2}\delta$$

Stehende Wellen

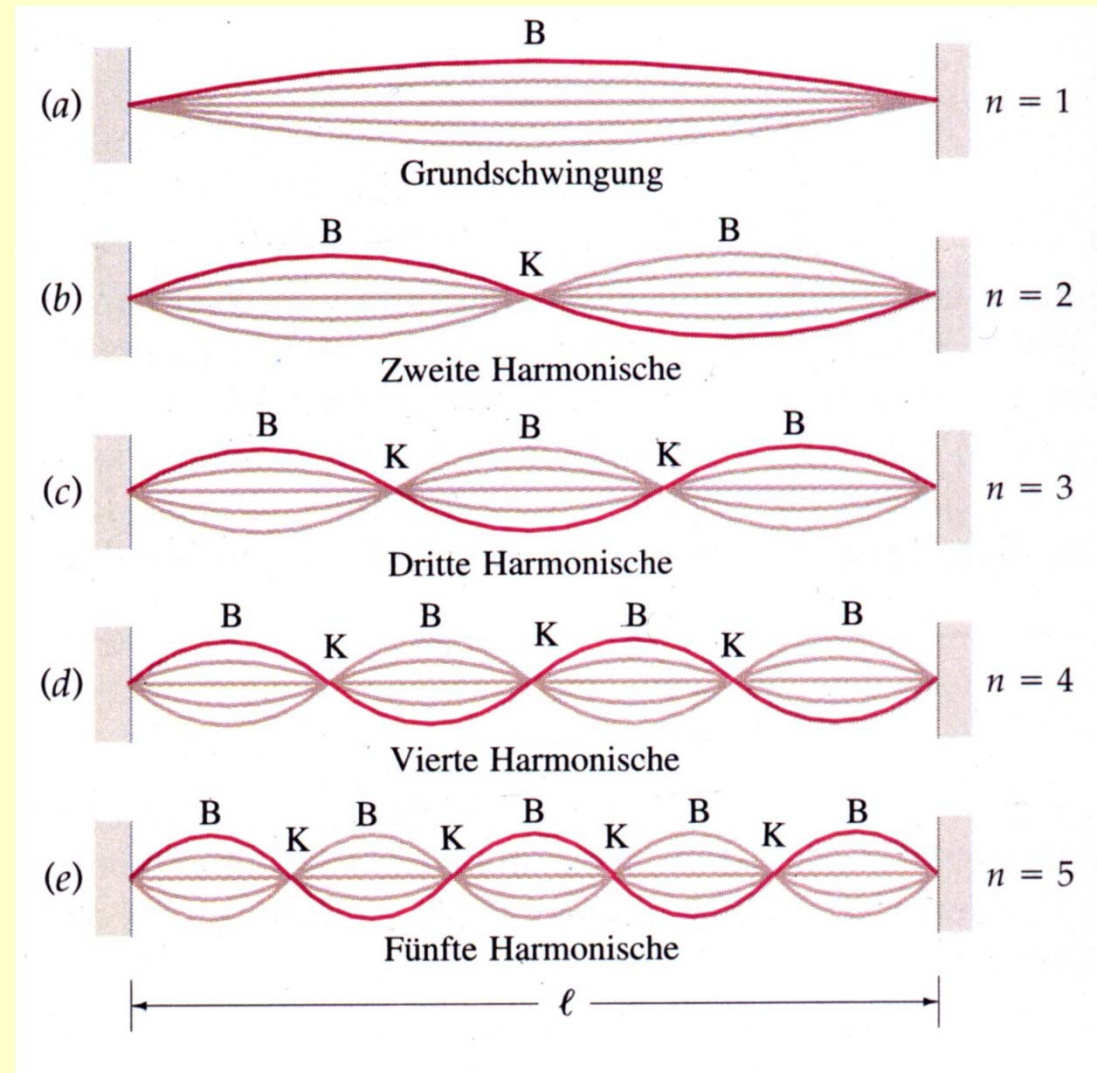


- Wird eine Saite in eine harmonische Schwingung versetzt, so beobachtet man unter geeigneten Bedingungen ein stehendes Wellenfeld.
- Es handelt sich um die *Resonanzfrequenzen*.
- Die *Resonanzfrequenz* mit der größten Wellenlänge (tiefsten Frequenz) ist die *Eigenfrequenz*, oder *Grundschwingung* oder *erste Harmonische* der Saite.

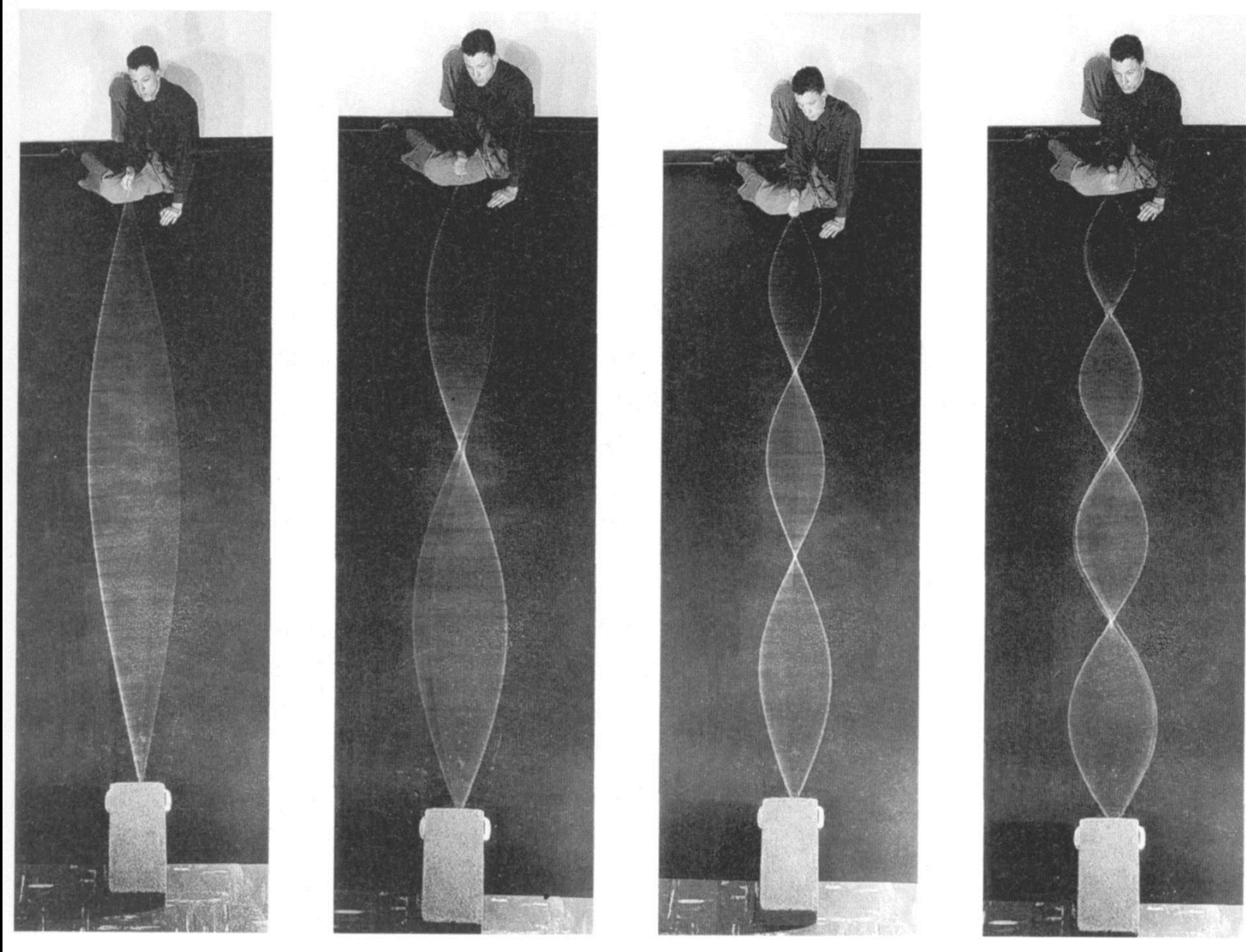
Stehende Wellen



- Stehende Wellen an einer beidseitig eingespannten Saite.
- Die n -te Harmonische hat n Schwingungsbäuche



Stehende Wellen



Stehende Wellen



- Die Länge der Saite l entspricht:
- $\lambda_1/2$ im Fall der Grundschiwingung
- $2 \cdot \lambda_2/2$ für die zweite Harmonische
- $3 \cdot \lambda_3/2$ für die dritte Harmonische
-
- $n \cdot \lambda_n/2$ für die n -te Harmonische.

- Es gilt: $\lambda_n = \frac{2l}{n}$ und $f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{2l} = n \cdot f_1$

Stehende Wellen

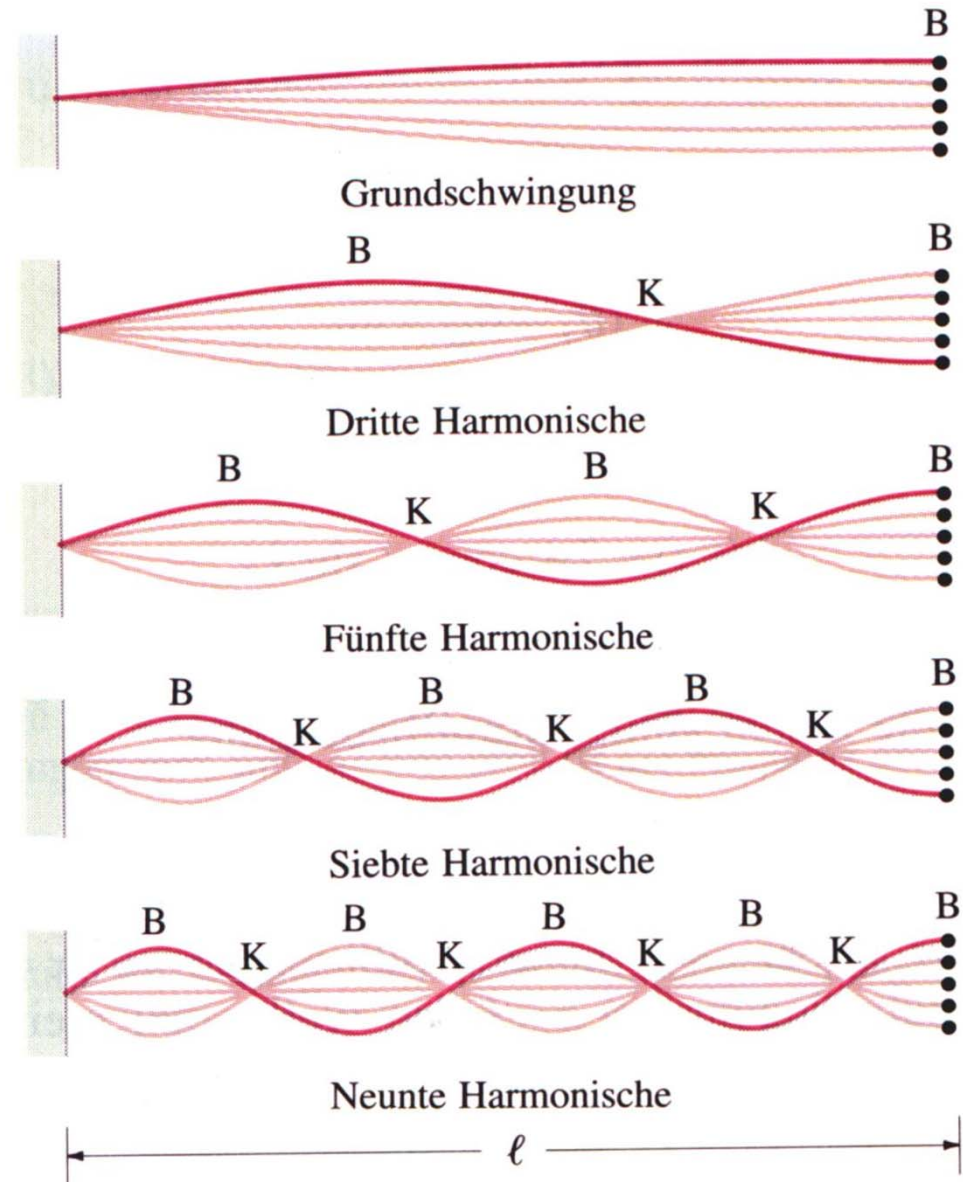
- Für Saiten mit einem festen Ende gilt:

$$\lambda_n = \frac{4l}{2n-1}$$

$$f_n = (2n-1) \frac{v}{2l}$$
$$= (2n-1) \cdot f_1$$

28.10.2010

Physik



Wellenfunktion



- Man betrachtet die stehende Welle als Überlagerung einer nach recht y_R und einer nach links y_L laufenden Welle:

$$y(x, t) = y_R + y_L = A \cdot \sin(kx - \omega t) + A \cdot \cos(kx + \omega t)$$

$$y(x, t) = 2A \cdot \cos \omega t \cdot \sin kx$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

$$\alpha = kx - \omega t$$

$$\beta = kx + \omega t$$

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = \omega t$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = kx$$

Wellenfunktion



- Randbedingungen: $y(x,t) = 0$ für $x = 0$ und $l = 0$.
- Es folgt: $\sin k_n l = 0$ mit: $k_n l = n \cdot \pi$

$$k_n l = \frac{2\pi}{\lambda_n} \cdot l = n \cdot \pi \qquad n \cdot \frac{\lambda_n}{2} = l$$

$$y_n(x,t) = 2A_n \cdot \cos \omega_n t \cdot \sin k_n x$$

Überlagerungen

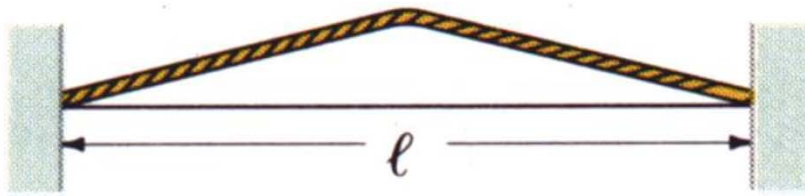


- Die tatsächliche Bewegung eines schwingenden Systems wird durch eine Überlagerung der Grundschiwingung und seiner Oberwellen beschrieben:

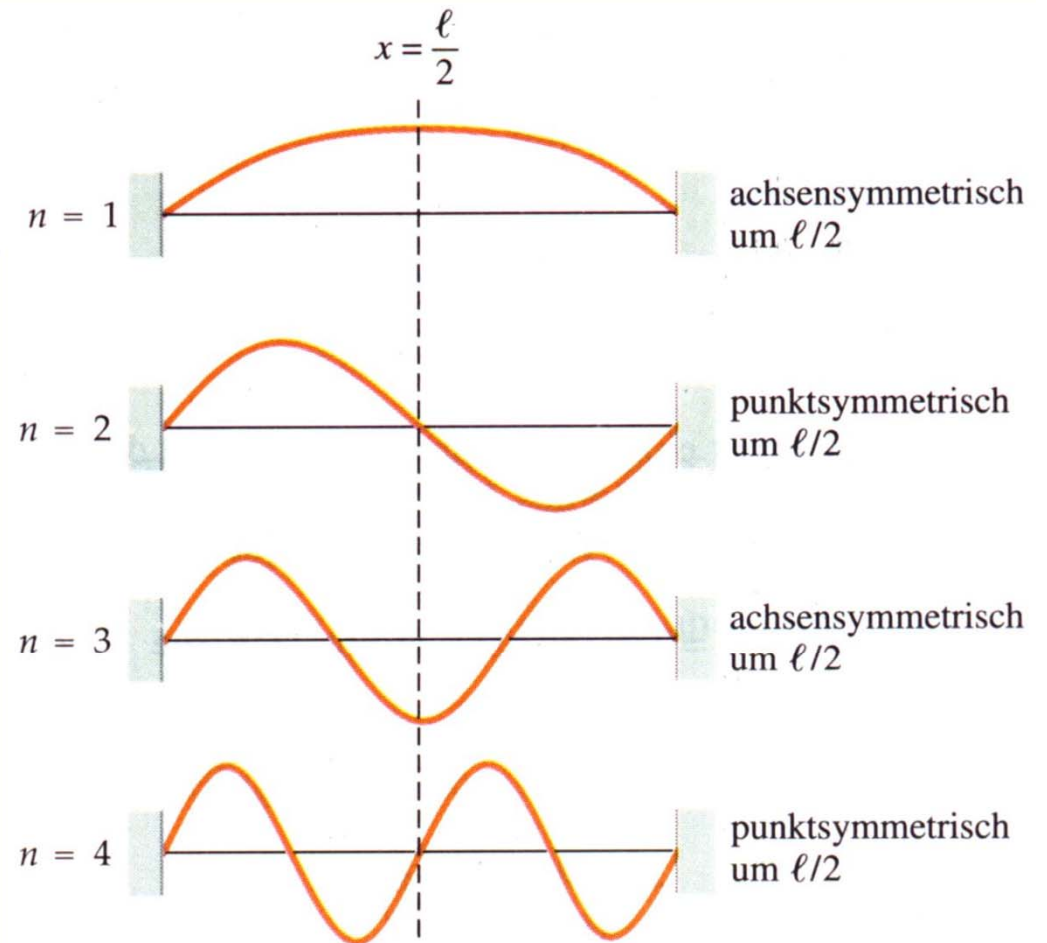
$$y(x, t) = \sum_n y_n(x, t) = \sum_n 2A_n \cdot \cos(\omega_n t + \delta_n) \cdot \sin k_n x$$

- A_n und δ_n sind Konstanten, die individuell für eine spezielle stehende Welle bestimmt werden müssen.

Gezupfte Saite



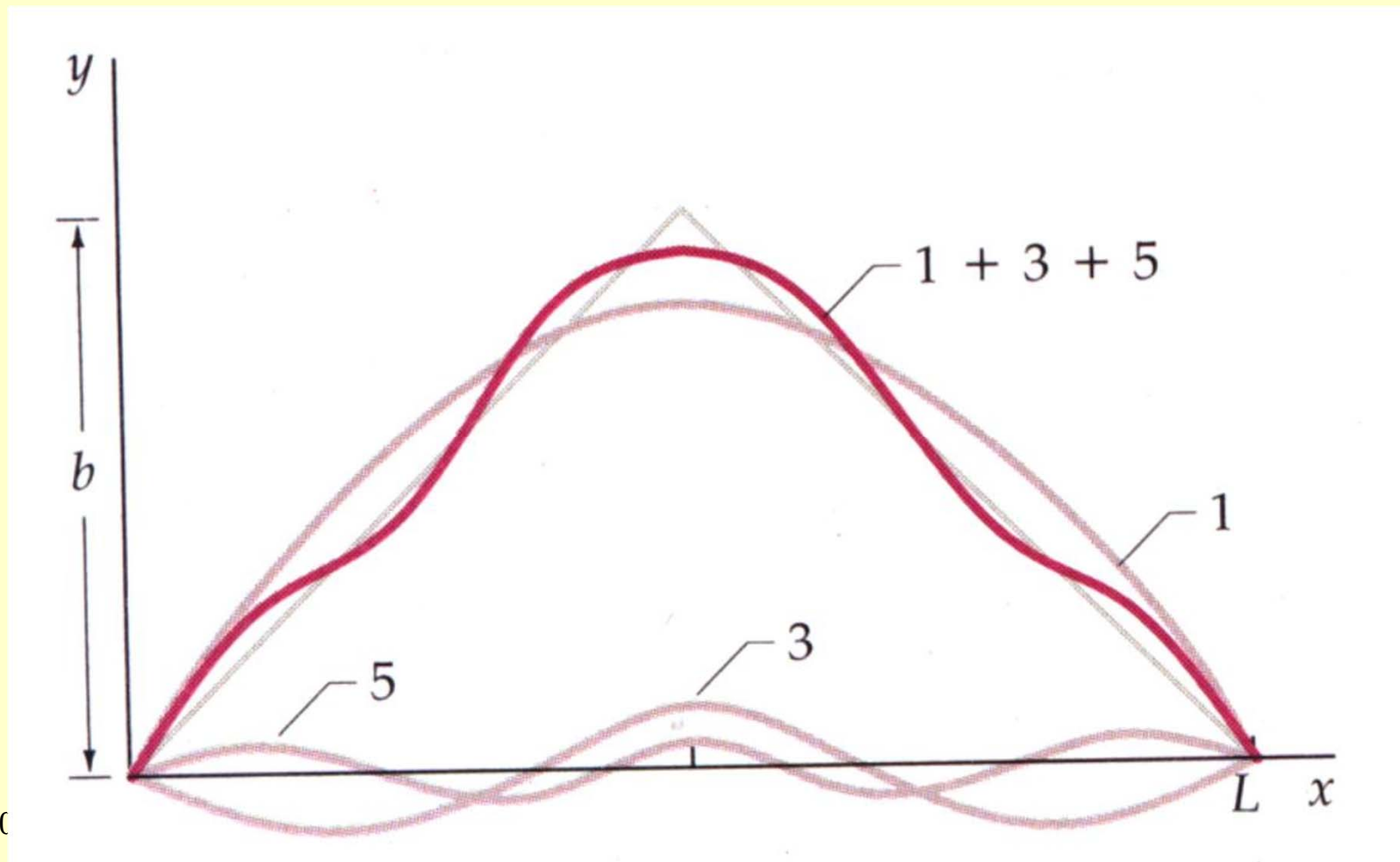
- Darstellung durch Überlagerung von Grundwelle und *Oberwellen*.



Gezupfte Saite



- Überlagerung von stehenden Wellen mit $n = 1, 3, 5$



Stehende Wellen einer Glocke



523 Hz



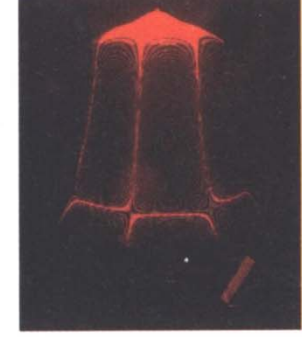
1569 Hz



2532 Hz



2819 Hz



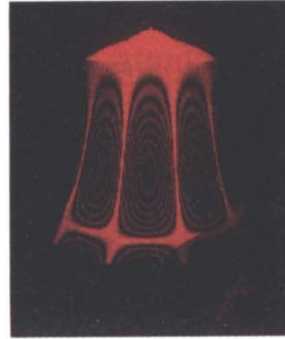
3104 Hz



3866 Hz



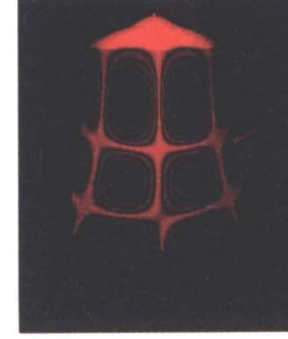
3957 Hz



4709 Hz



5323 Hz



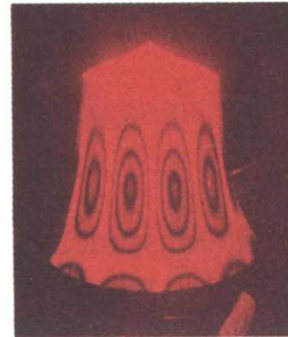
5435 Hz



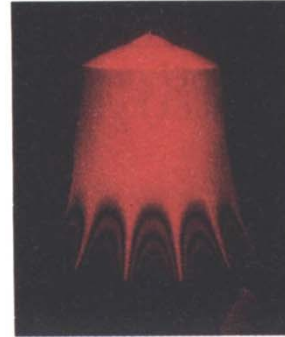
6137 Hz



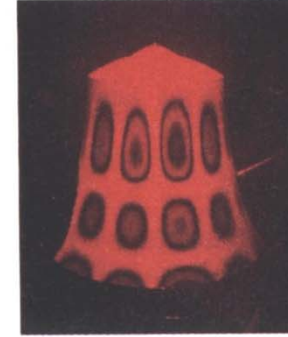
6263 Hz



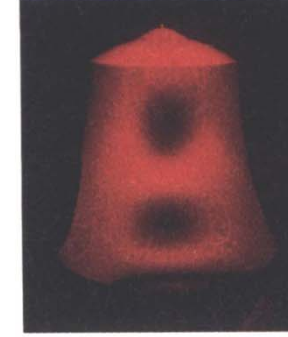
6571 Hz



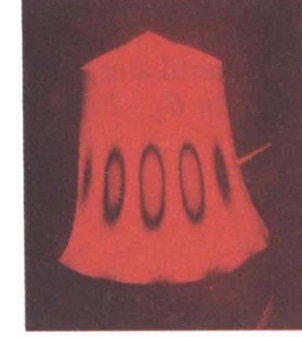
6892 Hz



7962 Hz



8002 Hz

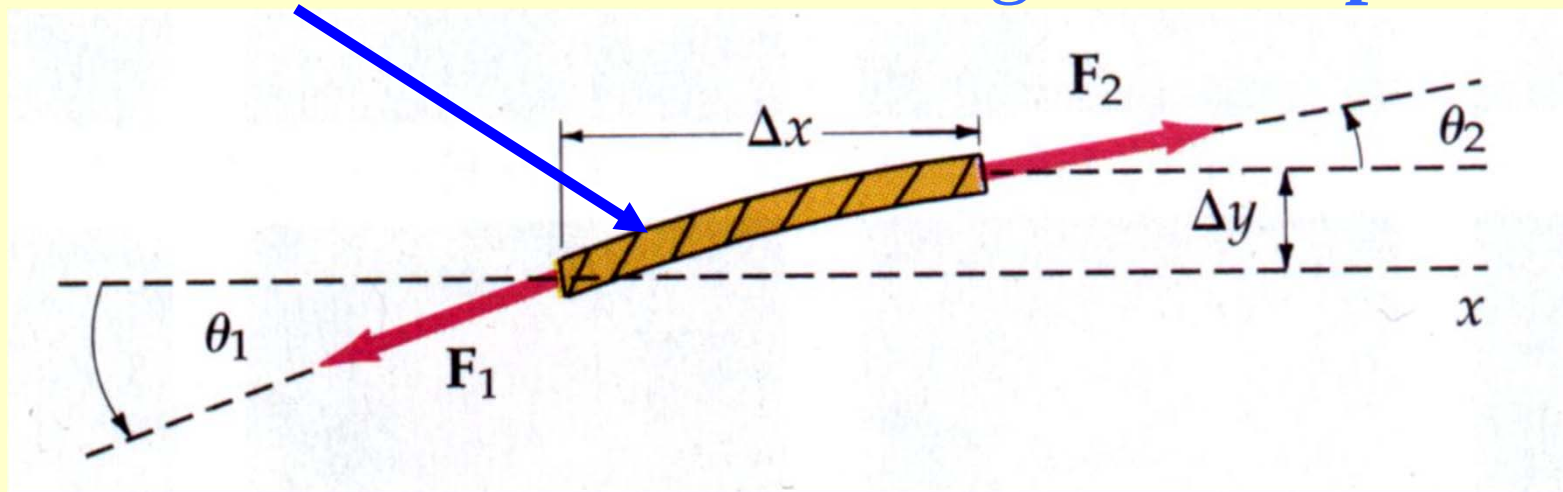


8639 Hz

Wellengleichung



- Die *Auslenkung einer Saite* führt zu einer *Krümmung*. Die Zugkräfte auf das Massenelement Δm sind deshalb nicht genau *antiparallel*.



- Die *Resultierende* (Vektorsumme von F_1 und F_2) entspricht der Rückstellkraft in Richtung auf die x -Achse.

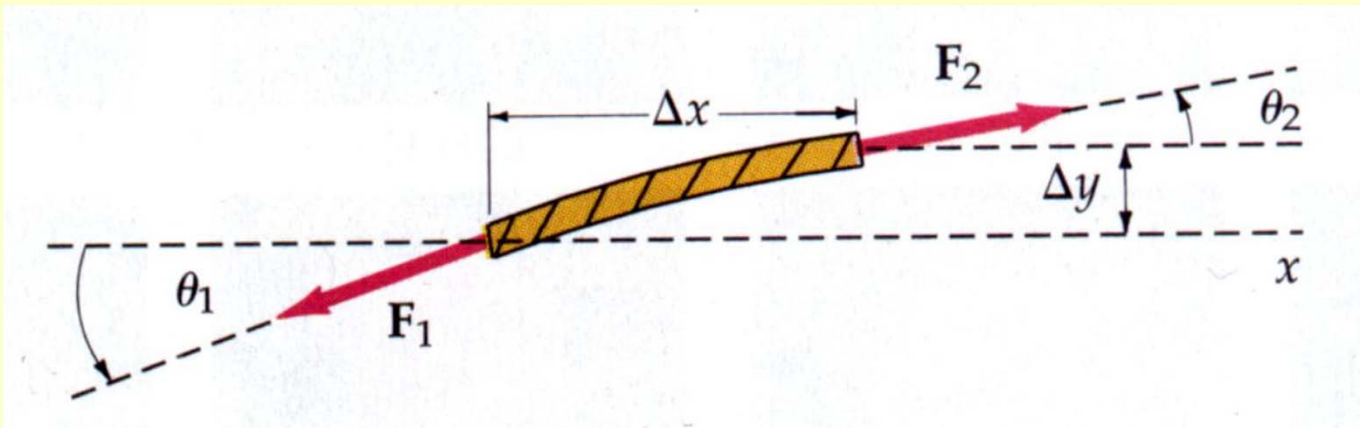
Wellengleichung

-[-]-

- Die Steigung S der Saite ist: $S = \tan \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
- Für die **Rückstellkraft** gilt:

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 + \vec{F}_2 &= |\vec{F}_1| \cdot \sin \theta_1 + |\vec{F}_2| \cdot \sin \theta_2 \approx F \cdot (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \approx \\ &\approx F \cdot (\tan \theta_2 - \tan \theta_1) = F \cdot \Delta S\end{aligned}$$

Änderung
der
Steigung



Partielle Ableitungen

- Die Auslenkung y ist eine *Funktion von zwei Variablen*, dem Ort x und der Zeit t : $y = y(x, t)$
- Die Ableitung nach einer Variablen bezeichnet man als *partielle Ableitung* nach x oder t :

- partielle Ableitung nach der Zeit:

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} y(x = \text{const}, t)$$

- partielle Ableitung nach dem Ort:

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} y(x, t = \text{const})$$

Wellengleichung



- Die *Steigung* S ist die partielle Ableitung von y nach x :

$$S = \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} y(x, t = \text{const})$$

- Die *Änderung der Steigung* ΔS ist die partielle Ableitung von S nach x multipliziert mit Δx :

$$\Delta S_{t=\text{const}} = \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} \cdot \Delta x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \cdot \Delta x = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \Delta x$$

Wellengleichung



- Für die *Summe der Kräfte* gilt also:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = F \cdot \Delta S = F \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \Delta x$$

- Nach der *Newtonschen Grundgleichung* erzeugt die Resultierende von $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$ eine Beschleunigung:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \Delta m \cdot a = \Delta m \cdot \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}$$

Wellengleichung



- Ersetzen wir das Massenelement Δm durch μ (Masse pro Länge) multipliziert mit Δx , folgt:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = F \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \cancel{\Delta x} = \mu \cdot \cancel{\Delta x} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$F \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mu \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

- **Wellengleichung:**

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Lösungen der Wellengleichung

- Funktionen, die die *Wellengleichung* lösen, werden *Wellenfunktionen* genannt.
- **Behauptung:** Jede Funktion $y(x, t) = y(x \pm v \cdot t)$
- ist Lösung der Wellengleichung.

- **Beweis:** Setze $x \pm v \cdot t = \xi$ und $y' = \frac{\partial y}{\partial \xi}$

- Es gilt:
$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = y' \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

- und:
$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = y' \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

Lösungen der Wellengleichung

- Für $y(x, t) = y(x \pm v \cdot t) = y(\xi)$ gilt:

- $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1$ und $\frac{\partial \xi}{\partial t} = \pm v$

- Es folgt: $\frac{\partial y}{\partial x} = y'$ und: $\frac{\partial y}{\partial t} = \pm v \cdot y'$

- Jetzt bildet man die *zweiten Ableitungen*:

- $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ und: $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

Lösungen der Wellengleichung

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot 1 \right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \xi} = \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \cdot 1 = y''\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot (\pm v) \right) = \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial \xi} \cdot (\pm v) = \\ &= \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} (\pm v) = \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \xi} (\pm v)(\pm v) = \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} v^2 = y'' v^2\end{aligned}$$

Lösungen der Wellengleichung

- Durch Auflösen nach y'' und gleichsetzen erhält man:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

- Vergleich mit:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

- Liefert:

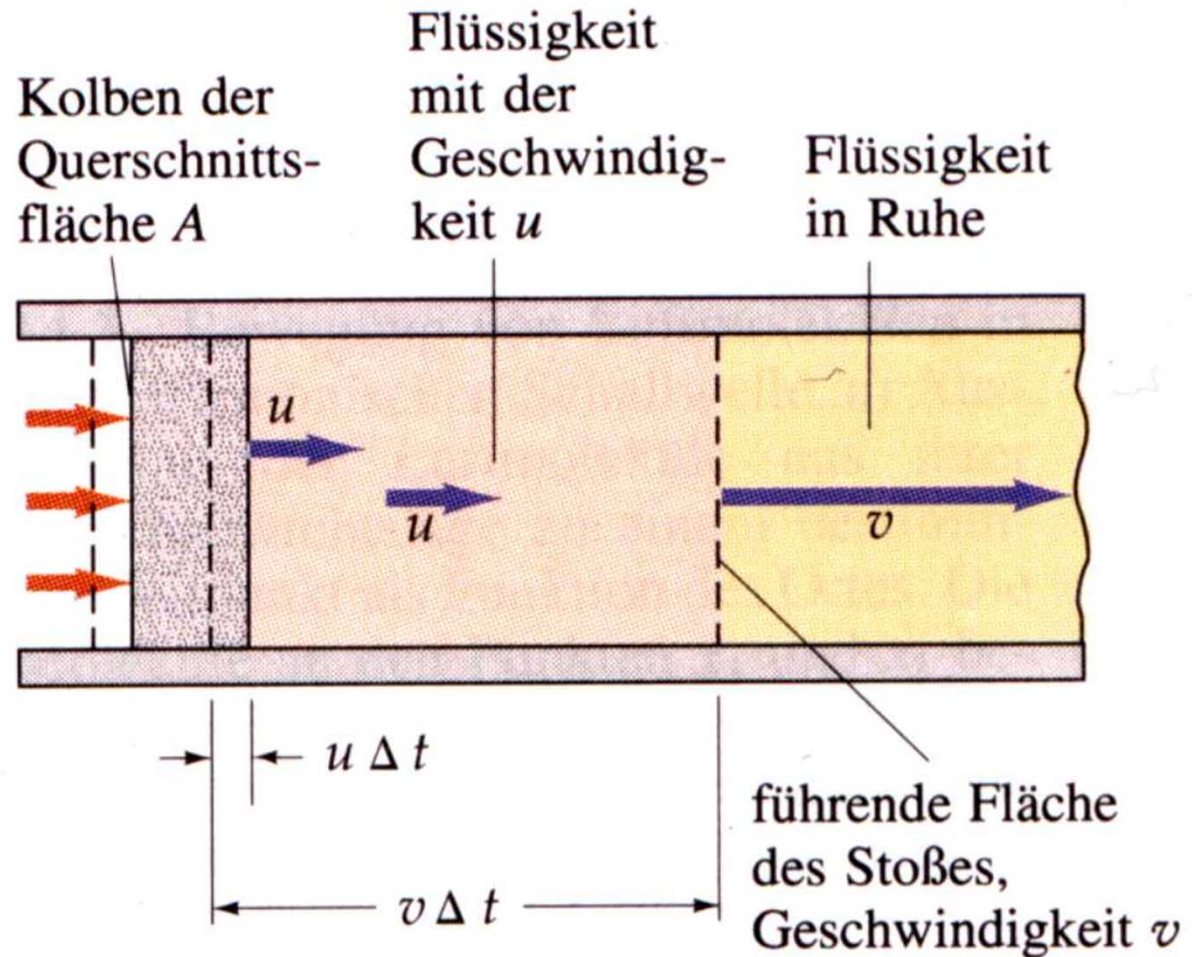
$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

4. Akustik

Schallgeschwindigkeit



- Die Bewegung des Kolbens mit der Geschwindigkeit u führt zu einer Stoßwelle mit der Geschwindigkeit v .



Schallgeschwindigkeit



- Die *Kraft* des Kolbens, $F = \Delta p \cdot A$, bewirkt eine Beschleunigung des Volumens mit der Masse $\Delta m = \rho \cdot A \cdot \Delta s = \rho \cdot A \cdot v \cdot \Delta t$.
- Die Beschleunigung ist $a = u / \Delta t$. Es folgt:
- $F = A \Delta p = \Delta m a = \rho A v \Delta t \frac{u}{\Delta t}$ bzw.: $\Delta p = \rho v u$
- *Druck-* und *Volumenänderung* können auch durch die Kompressibilität κ ausgedrückt werden.

Schallgeschwindigkeit



- *Kompressibilität*: $\kappa = \frac{-\Delta V}{V \Delta p}$
- Die *Volumenänderung* ist: $-\Delta V = A u \Delta t$
- Das *Bezugsvolumen* ist: $V = A v \Delta t$
- Für die *Druckänderung* folgt: $\Delta p = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{u}{v} = \rho v u$
- Für die *Schallgeschwindigkeit* gilt: $v = \sqrt{\frac{1}{\kappa \rho}}$

Schallwellen in Gasen

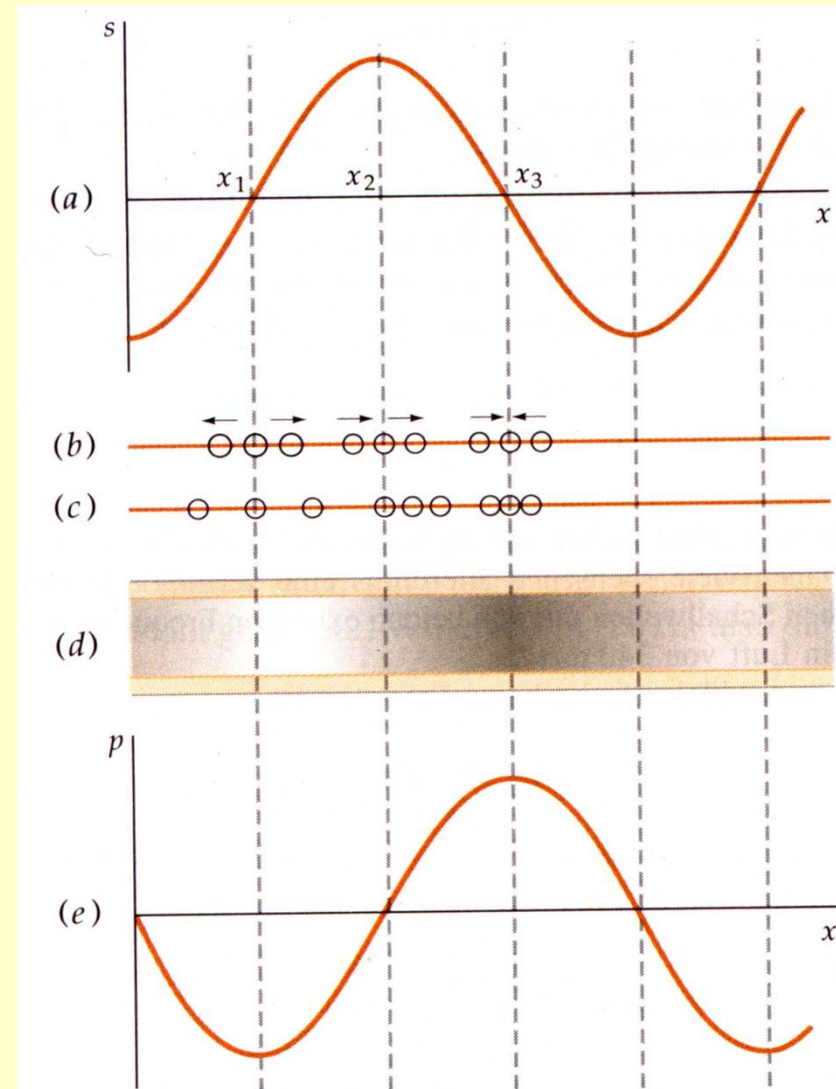


- Schallwellen entsprechen Schwingungen der Moleküle mit der Bewegungsamplitude $s(x,t)$.

$$s(x,t) = s_0 \sin(kx - \omega t)$$

- Die Bewegungen erzeugen Druckschwankungen:

$$\Delta p(x,t) = \Delta p_0 \sin\left(kx - \omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

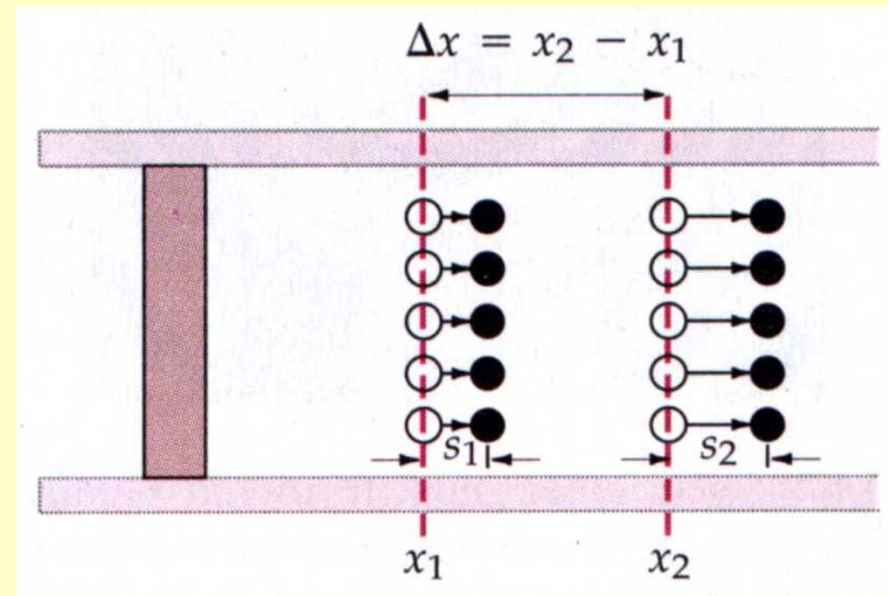


Zusammenhang von s_0 und p_0

- Durch unterschiedliche Bewegungsamplituden führt die Auslenkung des Volumens $V = A \cdot (x_2 - x_1) = A \cdot \Delta x$ zu einer Volumenänderung:

- $\Delta V = A \cdot (s(x_2, t) - s(x_1, t)) =$
- $= A \cdot \Delta s$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{A \Delta s}{A \Delta x} = \frac{\frac{\partial s}{\partial x} \cdot \Delta x}{\Delta x} = \frac{\partial s}{\partial x}$$



Zusammenhang von s_0 und p_0

- Nach Definition von κ und $s(x,t)$ gilt:

$$\begin{aligned}\Delta p &= -\rho v^2 \frac{\partial s(x,t)}{\partial x} = -\rho v^2 \frac{\partial}{\partial x} (s_0 \sin(kx - \omega t)) = \\ &= -\rho v^2 s_0 k \cos(kx - \omega t) = \rho v^2 s_0 k \cos(kx - \omega t - \frac{\pi}{2})\end{aligned}$$

$$\Delta p_0 = \rho v^2 s_0 k$$

- mit $k \cdot v = \omega$ folgt $\Delta p_0 = \rho \omega v s_0$
- Statt Δp und Δp_0 wird zur Vereinfachung auch p und p_0 verwendet.

Eigenschaften der Schallwellen

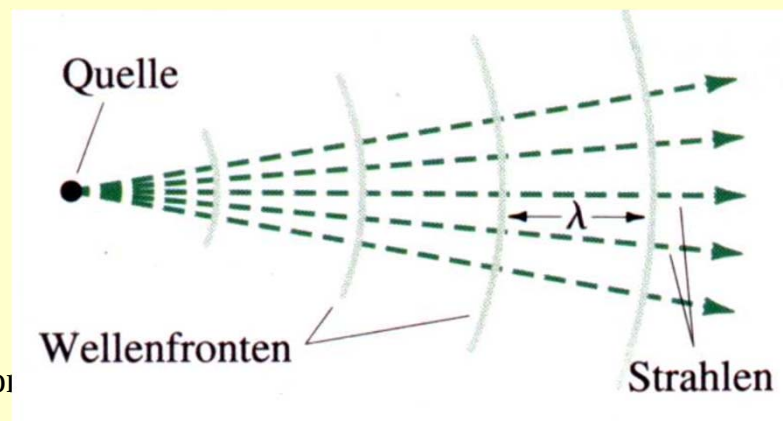
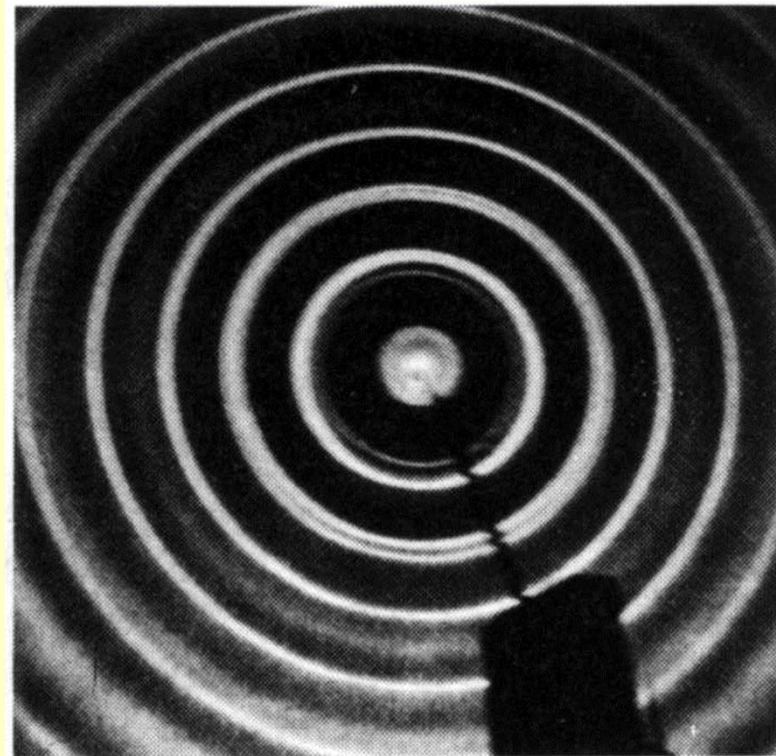


- Schallwellen in Flüssigkeiten und Gasen sind *longitudinale* Druck- oder Dichteschwingungen.
- Bei punktförmiger Schallquelle erfolgt in einem homogenen Medium (i. a. Flüssigkeiten u. Gases) eine *isotrope* Schallausbreitung.
- Die Schallwellen einer Punktquelle sind *Kugelwellen*.
- Die Ausbreitungsrichtung wird durch *Strahlen* angezeigt.

Dreidimensionale Wellen



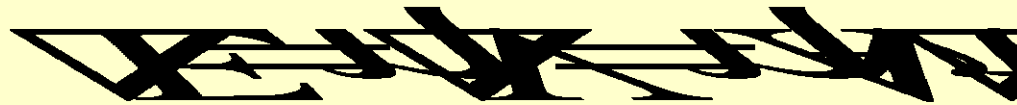
- Kreisförmige Wellenfronten einer Punktquelle.
- Bewegungsrichtung von Wellenfronten



Schallintensität



- *Schallintensität* ist die Schallleistung pro Fläche A im Abstand r von einer Schallquelle.
- Bei einer kugelförmigen Schallwelle mit einer mittleren Energiedichte $\eta = E/V$ führt eine Vergrößerung des Ausbreitungsvolumens zu einer Energievergrößerung von:



- Die *Leistung* ist:

$$\langle I \rangle = \frac{v}{v_E} = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 A^2$$

Schallintensität

- Für die *Schallintensität* gilt: $I = \frac{P}{A} = \rho v \langle \mathbf{b} \rangle$

Intensität =
= Energiedichte · Ausbreitungsgeschwindigkeit

Für harmonische Wellen gilt: $\Delta E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$

Mit $A = s_0$ und $m = \rho \cdot \Delta V$ folgt: $\Delta E = \frac{1}{2} \rho \omega^2 s_0^2 \Delta V$

Die *Energiedichte* ist:

$$\eta = \frac{\Delta E}{\Delta V} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 s_0^2$$

Schallintensität



- Da Auslenkungsamplitude und Druckerhöhung durch folgende Gleichung verknüpft sind:

$$\Delta p_0 = \rho \omega v s_0$$

- folgt:
$$I = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta p_0^2}{\rho v}$$

- Das menschliche Ohr kann bei $f = 1\text{kHz}$ eine Schallleistung von $10^{-12} \text{ W m}^{-2}$ wahrnehmen. Eine Leistung von 1 W m^{-2} gilt als Obergrenze.

Schallintensität und Lautstärke

- Der akustisch wahrnehmbare Bereich der Schallintensität überdeckt also etwa **zwölf Größenordnungen**.
- Die Schallempfindlichkeit des Gehörs ändert **logarithmisch**.
- Deshalb verwendet man für die Lautstärke eine **logarithmische Intensitätsskala**:

- **Lautstärke:** $\beta = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$ **Einheit: 1 dB**

Schallleistung und Lautstärke

- Als *Bezugsintensität* verwendet man:

$$I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$$

- Die Lautstärke 0 dB (**Hörgrenze**) entspricht also:

$$I = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$$

- Die Lautstärke 120 dB (**Schmerzgrenze**):

$$I = 1 \text{ W m}^{-2}$$

Übungsaufgabe



- a) Das Zugseil eines Skiliftes sei 400 m lang. und 80 kg schwer. Eine Auslenkung an einem Ende trifft als reflektierter Wellenberg nach 12 s wieder ein. Wie groß ist die Zugkraft?
- b) Der Ton **c** besitzt eine Frequenz von 261,63 Hz. Wie groß ist die Zugkraft an einer 80 cm langen Klaviersaite der Masse 7g ?

Lösung



- a) Die Geschwindigkeit des Wellenberges ist:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2l}{\Delta t} = 66,7 \frac{m}{s}$$

- Es gilt: $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ Es folgt:

$$F = v^2 \cdot \mu = v^2 \frac{m}{l} = 889 N$$

Lösung



- b) Die Saite besitzt den Ton **c** als Grundschiwingung.

- $f_1 = \frac{v}{2l_1}$ Es gilt: $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$

$$F = v^2 \mu = 4l^2 f_1^2 \frac{m}{l} = 4l f_1^2 m = 1533 \text{ N}$$

Übungsaufgabe



- Die **g**-Saite einer Violine ist 30 cm lang und schwingt (ohne Griff) mit 196 Hz. Die nächsthöheren Schwingungsmoden sind die Note **a** (220 Hz), **h** (247 Hz) , **c** (262 Hz) und **d** (294 Hz).
- Wie weit vom Saitenende müssen die Finger gesetzt werden?

Lösung



- Für die Schwingung der Saitenlänge l_1 gilt:

$$f_1 = \frac{v}{2l_1}$$

- Für die Schwingung einer Länge l gilt:

- $f = f_1 \frac{l_1}{l}$ und: $l = l_1 \frac{f_1}{f}$

- Der gesuchte Abstand vom Ende ist:

$$s = l_1 - l = l_1 \cdot \left(1 - \frac{f_1}{f}\right)$$

Lösung



- Für den Ton **a** (220 Hz) ist $s = 3,27$ cm
- Für den Ton **h** (247 Hz) ist $s = 6,19$ cm
- Für den Ton **c** (262 Hz) ist $s = 7,56$ cm
- Für den Ton **d** (294 Hz) ist $s = 10$ cm

Übungsaufgabe



- Eine Maschine verursacht eine Lautstärke von 78 dB. Auf welchen Wert steigt die Lautstärke, wenn fünf dieser Maschinen gleichzeitig betrieben werden?

Lösung



- Die Lautstärke einer Maschine ist:

$$\beta = 78 \text{ dB} = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$$

- Die Schallintensität Maschine beträgt:

$$I_1 = 10^{\frac{78}{10} - 12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 10^{-4,2} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 6,3095 \cdot 10^{-5} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$I_5 = 5 \cdot 6,3095 \cdot 10^{-5} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 3,155 \cdot 10^{-4} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$\beta = 10 \cdot \log \frac{3,155 \cdot 10^{-4}}{10^{-12}} = 10 \cdot \log(3,155 \cdot 10^8) = 85 \text{ dB}$$

Übungsaufgabe



- Der Geräuschpegel in der leeren Aula betrage 40dB. Während einer Klausur mit 100 Studenten steige der Pegel auf 60 dB (schweres Atmen, Stöhnen,...). Auf welchen Wert sinkt der Pegel, wenn 50 Studenten die Aula verlassen haben?

Lösung



- Bei der Lautstärke von 40 dB ist die Intensität:

$$\beta = 40 \text{ dB} = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$$
$$I_{\text{leer}} = 10^{\frac{40}{10}} \cdot 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

- Bei 60 dB:

$$I_{100} = 10^{\frac{60}{10}} \cdot 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 10^{-6} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Lösung



- Die mittlere Intensität eines Studenten beträgt:

$$I_s = \frac{10^{-6} - 10^{-8}}{100} \frac{W}{m^2} = 9,9 \cdot 10^{-9} \frac{W}{m^2}$$

- 50 Studenten erzeugen:

$$I_{50} = 50 \cdot 9,9 \cdot 10^{-9} \frac{W}{m^2} = 4,95 \cdot 10^{-7} \frac{W}{m^2}$$

- Lautstärke:

$$\beta = 10 \cdot \log \frac{I_{\text{leer}} + I_{50}}{I_0} = 10 \cdot \log \frac{10^{-8} + 4,95 \cdot 10^{-7}}{10^{-12}} = 57 \text{ dB}$$

Übungsaufgabe



- Auf einer zylindrischen Schwimmboje ($R = 1 \text{ m}$ und $H = 4 \text{ m}$) ist ein 20 m hoher zylindrischer Mast ($r = 10 \text{ cm}$) befestigt. Die Masse der leeren Boje betrage $m_B = 8 \text{ t}$. Mit welcher Masse m_Z (z. B. Blei) muss der Schwimmkörper gefüllt werden, damit er in Meerwasser ($\rho_M = 1,03 \text{ g cm}^{-3}$) direkt unter der Wasseroberfläche schwimmt? Was passiert, wenn die Boje in eine Flussmündung mit Süßwasser ($\rho_S = 1,0 \text{ g cm}^{-3}$) geschleppt wird? Wie hoch ragt die Mastspitze jetzt aus dem Wasser?

Lösung



- In Meerwasser soll nur der Schwimmkörper Auftrieb liefern:

$$A = V \rho g = (m_B + m_Z) \cdot g$$

$$m_Z = \pi R^2 H \rho - m_B = 4,94 \text{ t}$$

- Bei der geringeren Dichte des Süßwassers ist ein zusätzliches Auftriebsvolumen von:

$$V_Z = \frac{m_B + m_Z}{\rho_s} - \pi R^2 H = (12,94 - 12,56) \text{ m}^3 = 0,38 \text{ m}^3$$

- V_Z entspricht einer Mastlänge h von: $h = \frac{V_Z}{\pi r^2} = 12,1 \text{ m}$

- Der Mast ragt 7,9 m aus dem Wasser.

Übungsaufgabe



- Eine Masse von 5 kg bewirkt an einer Feder eine Verlängerung von 20 cm. Die Masse soll aus der Ruhelage um 10 cm ausgelenkt werden und zunächst sollen die ungedämpften Schwingungen betrachtet werden.
- a) Berechnen Sie die Federkonstante, die Schwingungsdauer, und die Geschwindigkeit beim Nulldurchgang.
- b) Welche Gesamtenergie hat das schwingende Feder-Masse-System?

Übungsaufgabe



- c) Nach welchen Zeiten erreicht die Masse nach dem Auslenken die Punkte der *halben* Maximalauslenkung (sowohl für negative als auch positive) .
- d) Berechnen Sie die potentielle, die kinetische und die Gesamtenergie in diesen Punkten.
- e) Eine Beobachtung des Federpendels zeigt, dass die Schwingung gedämpft ist. Eine genaue Messung der Schwingungsdauer ergibt 0,9000 s. Berechnen Sie die Dämpfungskonstante.

Übungsaufgabe



- f) Berechnen Sie für die gedämpfte Schwingung die Amplituden mit den in Aufgabe c) bestimmten Zeiten.

Lösung



- a) Federkonstante: $D = \frac{m g}{s} = 245,25 \frac{N}{m}$
- Schwingungsdauer: $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} = 0,897 s$
- Geschwindigkeit beim Nulldurchgang:

$$v_0 = \dot{x}_{\max} = x_0 \omega_0 = 0,7 m s^{-1}$$

Lösung



- b) Gesamtenergie: $E_{ges} = \frac{1}{2} D x_0^2 = 1,23 J$

- c) Amplitude: $x(t) = -x_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$
 $x(t_{1,2}) = \mp(x_0/2) = -x_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t_{1,2})$

$$t_1 = 0,14952 s \text{ und } t_2 = 0,29905 s$$

- d) potentielle Energie bei halber Amplitude:

$$E_{pot} = \frac{1}{2} D \left(\frac{x_0}{2} \right)^2 = 0,306 J$$

Lösung



- d) Gesamtenergie bleibt erhalten: $E_{ges} = 1,23 J$

- kinetische Energie:

$$E_{kin} = E_{ges} = (1,23 - 0,306) J = 0,924 J$$

- e) Die Dämpfungskonstante ist:

$$\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_e^2} = 0,558 s^{-1}$$

- Schwingfalllösung für $x = -x_0$ und $v_0 = 0$ bei $t = 0$

$$x(t) = -x_0 \cdot e^{-\beta t} \left(\frac{\beta}{\omega_e} \sin(\omega_e t) + \cos(\omega_e t) \right)$$

Lösung



- Für t_1 und t_2 aus Aufgabe c) ergeben sich:

$$x(t_1) = -5,262 \text{ cm}$$

$$x(t_2) = +3,594 \text{ cm}$$

Übungsaufgabe



- Ein gedämpfter harmonischer Oszillator schwingt mit einer Schwingungsdauer von 1 s. Nach fünf Schwingungsdauern hat der Oszillator nur noch 1% der ursprünglichen Amplitude.
- a) Berechnen Sie die Dämpfungskonstante.
- b) Welchen Energieanteil verliert der Oszillator pro Periode?
- c) Welche Schwingungsdauer hätte der Oszillator ohne Dämpfung?

Übungsaufgabe



- d) Welche Schwingungsdauer hat der Oszillator bei einer Erregung unter Resonanzbedingungen?
- e) Berechnen Sie die Resonanzüberhöhung in Bezug auf die Größe (F_a/D) .
- f) Welche Dämpfungskonstante müsste gewählt werden, um eine Amplitudenvergrößerung zu vermeiden?

Lösung



- a) Dämpfungskonstante: $\beta = 0,92103 \text{ s}^{-1}$
- b) Energieverlust: 84,15 %
- c) Eigenfrequenz ohne Dämpfung: $\omega_0 = 6,350 \text{ s}^{-1}$
- d) Schwingungsdauer bei Resonanz: $T_R = 1,011 \text{ s}$

Lösung



- e) Resonanzamplitude:

$$\frac{x_R^{\max}}{F_a/D} = \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^4}} = 3,484$$

- f) keine Resonanzüberhöhung für $\frac{\beta}{\omega_0} = 0,7071$

$$\beta = 4,4903\text{s}^{-1}$$

Anhang

(Das griechische Alphabet)

Griechisches Alphabet



alpha	α	A	eta	η	H
beta	β	B	theta	θ	Θ
gamma	γ	Γ	jota	ι	I
delta	δ	Δ	kappa	κ	K
epsilon	ε	E	lambda	λ	Λ
zeta	ζ	Z	my	μ	M

Griechisches Alphabet



ny	ν	N	tau	τ	T
xi	ξ	Ξ	ypsilon	υ	Y
omikron	o	O	phi	φ	Φ
pi	π	Π	chi	χ	X
rho	ρ	P	psi	ψ	Ψ
sigma	σ	Σ	omega	ω	Ω

- ulrich.schrewe@fh-hannover.de
ulrich.schrewe@t-online.de
www.stud.fh-hannover.de/~schrewe