Auswertung von Messdaten nach DIN 1319-3: Zusammenfassung

1. Eine Messgröße wird n mal gemessen: $y_1, y_2, y_3, ...y_i, ... y_n$. Der Mittelwert dient als Schätzwert für den wahren Wert der Messgröße: $\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1,N} y_i$

Bei unendlich vielen Messungen, die zufällig um den Mittelwert streuen, ergibt sich als Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion eine Gaußsche Normalverteilung (Glockenkurve) deren Zentrum als Erwartungswert μ und deren Breite als Standardabweichung σ bezeichnet wird. Der Mittelwert $\bar{y}$ dient als Näherung für $\mu \cong \bar{y}$, die empirische Standardabweichung s als Näherung für σ. Es gilt: $\sigma \cong s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1,n} (y_i - \bar{y})^2} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \left(n \sum_{j=1}^{n} y_j^2 - \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \right)^2 \right)}$.

Das Quadrat der Standardabweichung σ wird Varianz σ^2, das Quadrat der empirischen Standardabweichung s empirische Varianz s^2 genannt.
Die Standardmessunsicherheit $u(\bar{y})$ ergibt als Quotient der Standardabweichung und der Wurzel aus der Anzahl der Einzelmessungen n: $u(\bar{y}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cong \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1,n} (y_i - \bar{y})^2}$.

Die (absolute) Messunsicherheit $u(\bar{y}) = u_{abs}(\bar{y})$ besitzt die gleiche Einheit wie die Messgröße $\bar{y}$. Der Quotient $u_{abs}(\bar{y})/\bar{y}$ wird relative Messunsicherheit $u_{rel}(\bar{y})$ genannt. Sie ist dimensionslos und wird häufig in Prozent angegeben.
In der älteren Literatur wird σ auch mittlerer Fehler der Einzelmessung, $u(\bar{y})$ als mittlerer Fehler des Mittelwertes bezeichnet.

2. Bei einer Gaußschen Normalverteilung entspricht das Integral von $\mu - k\sigma$ bis $\mu + k\sigma$ einer Wahrscheinlichkeit von 68,3% für $k = 1$, 95,4% für $k = 2$ und 99,7 % für $k = 3$. Während beispielsweise bei unendlich vielen Messungen der wahre Wert mit 95,4% im Intervall $\mu - 2\sigma$ bis $\mu + 2\sigma$ liegt, muss bei endlich vielen Messungen ein größeres Intervall gewählt werden, um die gleiche Wahrscheinlichkeit zu gewährleisten. Gibt man einen Wahrscheinlichkeitswert vor, so nennt man das zugehörige Intervall den Vertrauensbereich. Bei n Messungen und der Wahrscheinlichkeit W ist das Intervall $[\mu - t(W,n) \cdot s, \mu + t(W,n) \cdot s]$ der Vertrauensbereich. $t(W,n)$ wird t-Faktor (Student-Faktor) genannt, s ist die empirische Standardabweichung. Für $W = 95\%$ können folgende Werte verwendet werden:

n =	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	20	50	100
t =	12,71	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,36	2,31	2,26	2,20	2,09	2,01	1,98

3. Das vollständige Ergebnis einer Messung besteht aus dem Schätzwert für die Messgröße und der Standardmessunsicherheit und kann in folgender Form angegeben werden: $\bar{y}, u(\bar{y})$; $\bar{y}, u_{rel}(\bar{y})$; $Y = \bar{y}(u(\bar{y}))$; $Y = \bar{y} \pm u(\bar{y})$; $Y = \bar{y} \cdot (1 \pm u_{rel}(\bar{y}))$. Zusätzlich kann man die mit den Faktoren $k = 2$ und $k = 3$ erweiterten Messunsicherheiten oder einen Vertrauensbereich angeben, vorzugsweise den für eine Wahrscheinlichkeit von 95%.

4. Eigenschaften der verwendeten Messmittel können zu systematischen Messabweichungen führen. Sind diese bekannt, kann man sie korrigieren (z. B. mit Hilfe einer Korrektionstabelle). Die Unsicherheit der Korrektion entspricht einer (normalerweise unbekannten) systematischen Unsicherheit u_{sys}. In vielen Fällen sind einfache Abschätzungen von u_{sys} sinnvoll. Die aus der Streuung der Messdaten gewonnene Standardmessunsicherheit $u(\bar{y})$ wird als statistische Unsicherheit betrachte und hier zur Unterscheidung von u_{sys} mit u_{stat} bezeichnet. Zur Bestimmung der Gesamtmessunsicherheit u_{ges} wird folgende Beziehung empfohlen:

$$u_{ges} = \sqrt{u_{sys}^2 + u_{stat}^2} \,.$$

5. Ist eine Messgröße y eine Funktion $y = f(x_1, x_2, ...x_m)$ mehrerer Eingangsgrößen x_i, so gilt für die Unsicherheit der Ergebnisgröße allgemein $u^2(y) = \sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k} u(x_i, x_k)$, wobei $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ die partielle Ableitung der Funktion f nach x_i bezeichnet und $u(x_i, x_k)$ die den Variablen x_i und x_k zugeordnete Unsicherheitskomponente. Diese kann als Produkt der individuellen Unsicherheiten $u(x_i)$, $u(x_k)$ mit einem Korrelationskoeffizienten $r(x_i, x_k)$ ausgedrückt werden: $u(x_i, x_k) = u(x_i) \cdot u(x_k) \cdot r(x_i, x_k)$. Die Komponenten $u(x_i, x_k)$ und $r(x_i, x_k)$ bilden jeweils eine $m \times m -$Matrix. Die Elemente in der Hauptdiagonalen ($i = k$) der Matrix der $u(x_i, x_k)$ sind die Varianzen $u^2(x_i)$, die anderen Matrixelemente nennt man Kovarianzen. Die Bestimmung der kompletten Matrix ist schwierig und mit großen Unsicherheiten behaftet. Deshalb verwendet man zur Vereinfachung häufig eine Näherung, bei der die Kovarianzen gleich Null gesetzt werden. Physikalisch interpretiert bedeutet dies, dass die Korrelationen der Messgrößen x_i und x_k untereinander vernachlässigt werden.

Für die Unsicherheit der Ergebnisgröße bei nicht-korrelierten Eingangsgrößen gilt:

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i).$$

Wenn die Eingangsgrößen in Form einfacher Operationen verknüpft sind, z. B durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenz und Exponentialfunktion, kann man zur Vereinfachung folgende Regeln verwenden:

a. Ist $y = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ so gilt $u_{abs}(y) = \sqrt{u_{abs}^2(x_1) + u_{abs}^2(x_2)}$

b. Ist $y = f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ so gilt $u_{abs}(y) = \sqrt{u_{abs}^2(x_1) + u_{abs}^2(x_2)}$

c. Ist $y = f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ so gilt $u_{rel}(y) = \sqrt{u_{rel}^2(x_1) + u_{rel}^2(x_2)}$

d. Ist $y = f(x_1, x_2) = x_1 / x_2$ so gilt $u_{rel}(y) = \sqrt{u_{rel}^2(x_1) + u_{rel}^2(x_2)}$

e. Ist $y = f(x_1) = x_1^n$ so gilt $u_{rel}(y) = n \cdot u_{rel}(x_1)$

f. Ist $y = f(x_1) = e^{x_1}$ so gilt $u_{rel}(y) = u_{abs}(x_1)$