

Bestimmung von Messunsicherheiten

Die vorliegende Anleitung ist für das Physiklabor für Elektrotechniker gedacht, um den Einstieg in die Abschätzung von Messunsicherheiten und die Berechnung der Unsicherheiten des Ergebnisses zu erleichtern. Die Vorgehensweise zur Bestimmung der Messunsicherheit ist abgestimmt mit den üblichen Vorgehensweisen in den anderen Laboren und den aus der Vorlesung „Elektrische Messtechnik“ /1/ bekannten theoretischen Grundlagen. Allerdings weichen die hier gegebenen Definitionen ab von der DIN-Norm 1319, Teil 3 /2/ in der letzten Fassung vom Mai 1996 (siehe hierzu auch die Ergänzungen im Skript Elektrische Messtechnik 1 ab Ausgabe 1998)

1 Grundlagen

Im Rahmen eines Labors werden eine Reihe unterschiedlicher Versuche durchgeführt, denen allen gemein ist, dass Messwerte registriert werden, die anschließend bei der Anfertigung des Berichtes ausgewertet und teilweise weiterverarbeitet werden. Hierzu ist neben der Angabe des Messergebnisses auch eine quantitative Angabe darüber notwendig, wie „vertrauenswürdig“ das Messergebnis der gesuchten physikalischen Messgröße ist.

Es ist das Ziel einer jeden Messung, den wahren Wert x_w einer Messgröße zu ermitteln. Da jede Messung mit dem Messwert x_a aufgrund einer unvollkommenen Messanordnung oder unvollkommener Messmittel zwangsläufig mit Abweichungen von dem gesuchten, wahren Wert der Messgröße behaftet ist, spricht man in diesen Fällen heute von "Messabweichung" A .

$$A = x_a - x_w \quad (1)$$

Ist die Größe (Zahlenwert mit Vorzeichen) dieser Messabweichung nicht bekannt - bei jeder Messung existiert eine unbekannte Messabweichung -, so führt das zu einer „Messunsicherheit“ Δx im Messergebnis x . Früher hat man all diese Phänomene unter dem Begriff Messfehler zusammengefasst, der heutzutage nicht mehr normgerecht ist.

Neben der absoluten Messunsicherheit A kann noch die relative Messunsicherheit $\Delta x/x$ oder die prozentuale Messunsicherheit $(\Delta x/x) \cdot 100\%$ angegeben werden.

2 Arten der Messabweichung

2.1 Grobe Abweichungen / Fehler

Ursachen

- Fehler des Beobachters bei Bedienung/Ablesung der Messinstrumente
- Irrtum des Beobachters bei Protokollierung/Auswertung der Messwerte
- Messverfahren oder Messbedingungen ungeeignet

Grobe Abweichungen/Fehler lassen sich durch Plausibilitätsbetrachtungen oder durch eine kritische Überprüfung des gesamten Messaufbaues bzw. der Messergebnisse vermeiden. Sinnvollerweise kann insbesondere bei unerwarteten Messwerten auch eine Kontrollmessung, möglichst durch eine zweite Person, durchgeführt werden.

2.2 Systematische Abweichungen

Systematische Abweichungen beeinflussen das Messergebnis unter identischen Messbedingungen stets in gleichem Sinne. Bei Wiederholung einer Messung unter gleichen Bedingungen sind sie **nach Betrag und Vorzeichen konstant**, können also durch Wiederholung der Messung (unter identischen Messbedingungen) weder erkannt noch vermieden werden.

Ursachen

- Unvollkommenheit der Messgeräte (z.B. Kalibrier- und Justierfehler, Nullpunktsdrift, Nichtlinearität, Alterung, Reibung, Lagerspiel etc...)
- Rückwirkung des Messgerätes auf die Messgröße (z.B. bei Strom- und Spannungsmessungen durch die Innenwiderstände der Messgeräte; bei Temperaturmessungen durch die Erwärmung des Messfühlers durch den Messstrom selbst etc...)
- Voreingenommenheit des Experimentators
- Überschreiten der Gültigkeitsgrenzen physikalischer Gesetze
-

Systematische Abweichungen lassen sich in zwei Untergruppen unterteilen.

Bekannte systematische Abweichungen führen bei jedem Messvorgang zu einer im Betrag und im Vorzeichen bekannten Abweichung und sollten durch eine Korrektur im Ergebnis berücksichtigt werden. Bsp.: Bei einer Spannungsmessung an einem stromdurchflossenen ohmschen Widerstand führt der bekannte Innenwiderstand des Messgerätes (Nennwert laut Datenblatt) immer zu einer bekannten, systematischen Abweichung und kann korrigiert werden.

Bem.: Bei fast allen Versuchen im Physikkolabor ist die Bestimmung dieser Korrektur nicht möglich bzw. zu aufwändig und es verbleibt die im folgenden beschriebene unbekannt systematische Abweichung.

Unbekannte systematische Abweichungen führen bei jedem Messvorgang zwar zu einer im Betrag und im Vorzeichen konstanten Abweichung, deren Wert aber nicht bekannt ist und daher auch nicht korrigierbar ist. Der Größtbetrag der unbekannt systematischen Abweichungen muss abgeschätzt werden und geht in die Messunsicherheit ein.

1. Bsp.: Die Innenwiderstände von Messgeräten haben gewisse Toleranzen, d.h. maximal zulässige Abweichungen (Größtbetrag) von ihrem Nennwert. Diese Abweichungen sind zwar konstant, aber (ohne zusätzliche präzise Messungen) unbekannt und auch ihr Einfluss bei einer Spannungsmessung kann daher nicht korrigiert werden.

Weitere Beispiele aus dem Physikkolabor, wo es zu unbekannt systematischen Abweichungen kommt, deren Größtbetrag **Sie** abschätzen müssen: Fadenlänge eines mathematischen Pendels, Abstände zu Drehachsen, Winkelauslenkungen

2.3 Zufällige Abweichungen

Zufällige Abweichungen sind nicht vorhersagbar, da der Wert und das Vorzeichen unbekannt sind. Sie beeinflussen das Messergebnis unter identischen Messbedingungen stochastisch, d.h. positive wie negative Abweichungen sind gleich wahrscheinlich.

Ursachen sind z.B.:

- Ablesefehler (Parallaxe)
- manuelle Zeitmessungen (Start- und Stoppauslösungen)
- Schwankungen der Umgebungsbedingungen (Temperatur, Druck ...)
- Schwankungen der Messgeräteeigenschaften (Referenzspannung bei Digitalgeräten)
- Statistischer Charakter der Messgröße („Rauschen“)
-

Zufällige Abweichungen sind statistischer Natur und lassen sich durch n -fache Wiederholung der Messung sowie einer Auswertung der Messdaten auf der Basis der Wahrscheinlichkeitsrechnung reduzieren.

Die zufälligen Messabweichungen und die unbekannt systematischen Messabweichungen bestimmen zusammen die Messunsicherheit des Messergebnisses, wie in Abb.1 dargestellt und müssen mathematisch bestimmt werden.

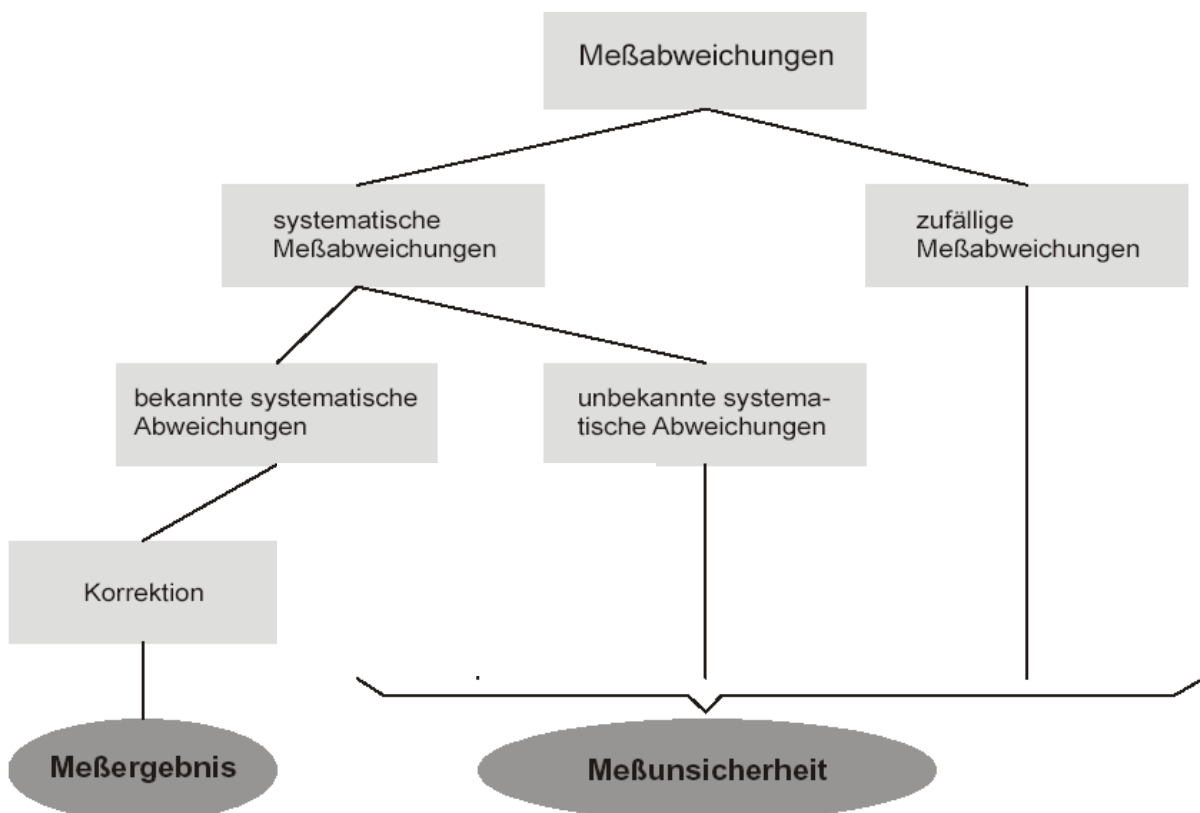


Abb.1: Einteilung der Messabweichungen

3 Mathematische Berechnung der Messabweichung

3.1 Einmalige direkte Messung

Die Messgröße x ist die gesuchte Ergebnisgröße und wird nur mit einer Messung direkt bestimmt. Die Messunsicherheit Δx der Messgröße x muss dann abgeschätzt werden.

Eine einmalige Messung ist dann sinnvoll, wenn davon auszugehen ist, dass zufällige Abweichungen deutlich kleiner sind als die unbekannt, systematischen Messabweichungen, die abzuschätzen sind. Zufällige Abweichungen können dann vernachlässigt werden. Die Messunsicherheit Δx entspricht in diesem Fall der Abschätzung des Größtwertes für die unbekannt, systematische Abweichung.

Abschätzung des Größtwertes der unbekannt systematischen Abweichung z.B. durch:

- Fehlergrenzen der Messgeräte
- Genauigkeitsklassen von Analogmessgeräten, z. B. Klasse 1,5 \rightarrow maximale Abweichung 1,5 % vom Messbereichs-Endwerts
- Herstellerangaben in den Bedienungsanleitungen am Arbeitsplatz
- Fehlansichtungen bei Längen bzw. Winkelmessungen

Bem.: Die Fehlergrenzen bzw. Genauigkeitsklassen von Messgeräten werden im wesentlichen im Hinblick auf systematische Abweichungen vorgegeben, dürfen aber auch nicht durch zufällige Abweichungen überschritten werden. Im Regelfall sind die zufälligen Abweichungen deutlich kleiner als die Fehlergrenzen und können daher vernachlässigt werden.

Das Messergebnis ist in der Form $(x \pm \Delta x)$ anzugeben, bei einer Längenmessung l z.B.

$$\text{Länge } l = (97,5 \pm 2,3) \text{ cm}$$

Der Messwert und die Messunsicherheit sind immer mit einer sinnvollen Ziffernzahl anzugeben. Die sinnvolle Ziffernzahl ergibt sich aus der im Experiment erzielbaren Messunsicherheit, die mit 1-2 signifikanten Stellen angegeben werden sollte. Messwert und Messunsicherheit werden immer mit der gleichen Anzahl signifikanter Stellen angegeben, insbesondere darf der Messwert nicht mehr signifikante Stellen als die Unsicherheit aufweisen.

3.2 Mehrmalig direkte Messung

Die Messgröße x ist die gesuchte Ergebnisgröße und wird in einer Messreihe n -mal direkt bestimmt ($x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$). Im Folgenden wird angenommen, dass die Messgröße nur zufällige Streuungen aufweist und einer Gaußverteilung gehorcht (Gaußverteilung, siehe Skript Messtechnik 1).

Der arithmetische Mittelwert \bar{x} entspricht dann dem ermittelten Wert der Messgröße:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \quad (2)$$

Als Maß für die Streuung der Messreihe dient die Standardabweichung s (in der Literatur häufig auch „mittlerer Fehler der Einzelmessung“ genannt)

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (3)$$

Der in (2) berechnete Mittelwert entspricht dem „wahren“ Mittelwert der Messreihe nur für den theoretischen Fall einer Messreihe mit unendlichen vielen Messwerten ($n \rightarrow \infty$). In der Praxis entsteht durch den Abbruch der Messreihe nach n Messungen eine Messabweichung zwischen dem berechneten und dem „wahren“ Mittelwert, dessen Maximalwert abgeschätzt werden kann und immer zu einer Messunsicherheit Δx bei zufälligen Messreihen führt. Der Maximalwert hängt ab von der Standardabweichung s , der Messanzahl n und einem so genannten Studentfaktor t :

$$\Delta x = t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (4)$$

Der Studentfaktor t hängt selbst von der Anzahl n der Messwerte und statistischen Sicherheit, mit der die Messunsicherheit bestimmt werden soll, ab und liegt üblicherweise in tabellarische Form, wie in Tabelle 1, vor. Im Physikkolabor soll mit einer 95% statistischen Sicherheit gemäß der Tabelle 1 gerechnet werden.

n	2	3	4	5	6	8	10	15	20	∞
t	12,71	4,30	3,18	2,78	2,57	2,37	2,26	2,15	2,09	1,96

Tab.1: t -Verteilung für eine statische Sicherheit von 95%

Der Studentfaktor t berücksichtigt im Wesentlichen, dass bei einer kleinen Anzahl n von Messwerten die Streuung keiner Gaußverteilung mehr entspricht. Für eine große Anzahl n von Messwerten nimmt t denselben Wert an, der sich bei einer Gaußverteilung für eine 95%-ige Sicherheit ergibt ($t = 1,96 \approx 2$).

Sind neben den zufälligen Messabweichungen auch unbekannte, systematische Messabweichungen vorhanden, so muss für diese ähnlich wie in Kap. 3.1 beschrieben ein Größtwert Δx_{sys} abgeschätzt werden und die Gesamtmessunsicherheit errechnet sich dann:

$$\Delta x = t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} + \Delta x_{\text{sys}} \quad (5)$$

Das Messergebnis ist in der Form $\bar{x} \pm \Delta x$ und der statistischen Sicherheit in Prozent anzugeben.

3.3 Mehrmalig indirekte Messung (Fehlerfortpflanzung)

Die gesuchte Ergebnisgröße z wird aus k Eingangsgrößen ermittelt, die über eine mathematische Beziehung $z = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ miteinander verknüpft sind. Die k Messwerte (x_1, x_2, \dots, x_k) und die zugehörigen k Messunsicherheiten $(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_k)$ werden durch

direkte Messungen nach 3.1 oder 3.2 ermittelt (oder direkt aus Herstellerangaben bzw. Literaturangaben). Die *maximale* Messunsicherheit Δz für die Ergebnisgröße kann dann mit Hilfe des totalen Differentials bestimmt werden:

$$\Delta z = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \right| \quad (6a)$$

Alternativ hierzu kann auch die *wahrscheinliche* Messunsicherheit angegeben werden, berechnet aus der quadratischen Summe der einzelnen Unsicherheiten

$$\Delta z = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \right)^2} \quad (6b)$$

Die so bestimmte Unsicherheit (6b) ist kleiner als die maximale (6a), allerdings insbesondere bei vielen Einflussgrößen meist realistischer. In jedem Fall ist anzugeben, nach welcher Methode die Messunsicherheit bestimmt wurde.

Dies Verfahren soll an einem ganz einfachen Beispiel erläutert werden. Um die Leistung P an einem Verbraucher zu bestimmen, messen Sie die Spannung $U = 220\text{V} \pm 1\text{V}$ und den Strom $I = 0,1\text{A} \pm 0,002\text{A}$.

Die Ergebnisgröße

$$z = f(x_1, x_2)$$

hängt hier von zwei Eingangsgrößen x_1 und x_2 ab, und zwar

$$P = f(U, I) = U \cdot I .$$

Damit ergibt sich für die Messunsicherheit Δz der Ergebnisgröße

$$\Delta z = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 \right|$$

und hier

$$\Delta P = \left| \frac{\partial(U \cdot I)}{\partial U} \cdot \Delta U \right| + \left| \frac{\partial(U \cdot I)}{\partial I} \cdot \Delta I \right| = |I \cdot \Delta U| + |U \cdot \Delta I|$$

und mit den Zahlenwerten

$$P = U \cdot I = 220\text{V} \cdot 0,1\text{A} = 22 \text{ W}$$

$$\Delta P = |I \cdot \Delta U| + |U \cdot \Delta I| = |0,1\text{A} \cdot 1\text{V}| + |220\text{V} \cdot 0,002\text{A}| = 0,1\text{W} + 0,44 \text{ W} = 0,54 \text{ W}$$

gilt als Endergebnis

$$P = (22 \pm 0,54) \text{ W}$$

Es ist hier die *maximale* Messunsicherheit bestimmt worden, in ähnlicher Weise kann die *wahrscheinliche* Messunsicherheit berechnet werden.

3.3.1 Spezialfall reine Multiplikation bzw. Division

Falls die Ergebnisgröße $z = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ sich nur aus Multiplikationen und/oder Divisionen der Eingangsgrößen (x_1, x_2, \dots, x_k) ergibt, kann durch betragsmäßige Addition der relativen Messunsicherheiten $(\frac{\Delta x_1}{x_1}, \frac{\Delta x_2}{x_2}, \dots, \frac{\Delta x_k}{x_k})$ der Eingangsgrößen die *maximale*, relative

Messunsicherheit $\frac{\Delta z}{z}$ der Ergebnisgröße z einfach berechnet werden, also

$$\frac{\Delta z}{z} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\Delta x_i}{x_i} \right| \quad (7a)$$

Alternativ hierzu kann auch die *wahrscheinliche* relative Messunsicherheit angegeben werden (vergleiche auch Formel (6b))

$$\frac{\Delta z}{z} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\Delta x_i}{x_i} \right)^2} \quad (7b)$$

Falls in der Ergebnisgröße z eine der Eingangsgrößen x nicht nur einfach sondern mit einem Exponenten r auftaucht, also z.B. für den einfachen Fall

$$z = f(x) = x^r = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{r\text{-mal}} \text{ bzw.}$$

$$z = f(x) = \frac{1}{x^r} = \frac{1}{\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{r\text{-mal}}}$$

so lässt sich z ebenso als r -fache Multiplikation bzw. Division der Eingangsgröße x darstellen. Wird jetzt die Gl.(7a) angewandt, so erhält man für jede der Multiplikationen bzw. Divisionen in der Summe den Term $\left| \frac{\Delta x}{x} \right|$, also insgesamt für die maximale, relative Messunsicherheit

$$\frac{\Delta z}{z} = \left| r \cdot \frac{\Delta x}{x} \right|$$

und analog für die *wahrscheinliche* relative Messunsicherheit gemäß Gl. (7b)

$$\frac{\Delta z}{z} = \sqrt{\left(r \cdot \frac{\Delta x}{x} \right)^2}$$

Bei mehreren Eingangsgrößen x_i führt also allgemein der Exponent r_i zu einer Multiplikation der relativen Messunsicherheit mit diesem Exponenten. Danach erfolgt dann die Summenbildung über alle Eingangsgrößen gemäß Gl.(7a) bzw. (7b).

Dies gilt ohne Beweis auch bei nicht ganzzahligem r , z.B. gilt bei

$$z = f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$$

für die maximale, relative Messunsicherheit

$$\frac{\Delta z}{z} = \left| r \cdot \frac{\Delta x}{x} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{\Delta x}{x} \right|.$$

Eine allgemeine Herleitung von Gl. (7a) und Beispiele finden Sie im Anhang A1.

4 Bestimmung von Ausgleichsgeraden

Bei mehreren Versuchen im Physiklabor müssen Steigungswert m und/oder Achsabschnitt b einer Ausgleichsgeraden $y = m \cdot x + b$ sowie die zugehörigen Messunsicherheiten Δm , Δb gefunden werden. Hierzu ist es nötig, n Wertepaare als

$$\text{Messpunkte } (x_i, y_i) \quad i=1,2,\dots,n$$

zu ermitteln. Es gilt dann

$$m = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)}{n \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (7)$$

$$b = \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (8)$$

und mit der Messunsicherheit $\Delta y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - m \cdot x_i - b)^2}{n - 2}}$

$$\Delta m = \Delta y \cdot \sqrt{\frac{n}{n \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}} \quad (9)$$

$$\Delta b = \Delta y \cdot \sqrt{\frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)}{n \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}} \quad (9)$$

Der Korrelationskoeffizient r gibt allgemein an wie „gut“ Messwerte einen funktionalen Zusammenhang (hier eine Gerade) einhalten, wie „gut“ also die Korrelation zwischen x und y ist. Der Korrelationskoeffizient r kann Werte zwischen 0 (keine Korrelation) und 1 (vollständige Korrelation) annehmen. Es gilt

$$r^2 = \frac{\left(n \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) \right)^2}{\left(n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \cdot \left(n \cdot \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right)} \quad (10)$$

Viele mathematischen Softwareprogramme (und auch Excel) ermöglichen direkt die Bestimmung der oben angegebenen Parameter.

4.1 Linearisierung

Häufig kann es sinnvoll sein, Kurvenverläufe aus Messpunkten zu linearisieren und dann die Ausgleichsgerade nach obiger Anleitung zu bestimmen.

Bsp. 1: Als Messreihe sind die Wertepaare (x^*, y) registriert worden, die in folgendem physikalischen Zusammenhang stehen $y = m \cdot g(x^*) + b$, mit einer beliebigen i. allg. nichtlinearen Funktion $g(x^*)$. Um hier die Parameter m und b zu bestimmen, wird ein „neues“ $x = g(x^*)$ aus den Ursprungsmesswerten x^* berechnet. Mit diesen neuen x-Werten gilt jetzt der lineare Zusammenhang $y = m \cdot x + b$, was auch durch eine Skizze überprüft werden kann. Mit Hilfe der Ausgleichsgeradenberechnung (s. Kap.4 bzw. Excel) können jetzt die Parameter m und b bestimmt werden.

Diese Methode muss z.B. im Laborversuch *Interferometer, Teil 4.3, Formel (8)* eingesetzt werden. Aus den Ursprungsmesswerten $(x^* = \alpha, y = \Delta S_{\text{optisch}})$ werden die neuen Messwertepaare $(x = \sin^2 \alpha, y = \Delta S_{\text{optisch}})$ gebildet. Aus der in dieser Weise linearisierten Funktion $y(x) = m \cdot x + b$ kann dann über die Ausgleichsgeradenberechnung (s. Kap.4 bzw. Excel) der gesuchte Parameter m direkt bestimmt werden.

Bsp. 2: Als Messreihe sind die Wertepaare (x, y^*) registriert worden, die in einem physikalischen Zusammenhang $g(y^*) = m \cdot x + b$ stehen, mit einer beliebigen i. allg. nichtlinearen Funktion $g(y^*)$. Analog zu Bsp.1 errechnet man hier neue y-Werte $y = g(y^*)$ und erzielt den wieder eine linearisierte Funktion $y = m \cdot x + b$, was auch durch eine Skizze überprüft werden kann. Mit Hilfe der Ausgleichsgeradenberechnung (s. Kap.4 bzw. Excel) können jetzt die Parameter m und b bestimmt werden. Diese Methode muss z.B. im Laborversuch *Geiger-Müller-Zähler*, S.4 unten angewandt werden.

Bsp. 3: Als Messreihe sind die Wertepaare (x^*, y^*) registriert worden, die in einem physikalischen Zusammenhang $g(y^*) = m \cdot h(x^*) + b$ stehen, mit beliebigen i. allg. nichtlinearen Funktion $g(y^*)$ und $h(x^*)$. Analog zu den oberen Beispielen werden jetzt neue Wertpaare $(x = h(x^*), y = g(y^*))$ berechnet, die übereinander aufgetragen eine Gerade ergeben und es lassen sich wieder die Methoden der Ausgleichsgeradenberechnung (s. Kap.4 bzw. Excel) zur Berechnung der Parameter m und b anwenden.

5 Gewichtetes Mittel

Es kann vorkommen, dass für **eine einzige** zu messende physikalische Größe Messwerte (x_1, x_2, \dots, x_n) mit unterschiedlicher Messunsicherheit $(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$ erzielt werden, z.B. aufgrund unterschiedlicher Messverfahren oder wenn bei mehrmaliger Messung einer Ergebnisgröße die Eingangsgrößen unterschiedliche Messunsicherheiten besitzen. In diesem Fall darf nicht eine einfache Mittelwertbildung der Einzelwerte (x_1, x_2, \dots, x_n) nach Gl. (2) erfolgen, denn die Einzelwerte x_i mit der geringeren Messunsicherheit Δx_i müssen mit einem stärkeren Gewichtungsfaktor g_i gewichtet werden. Es gilt dann mit

$$g_i = \frac{1}{\Delta x_i^2} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

für den Mittelwert der gesuchten Messgröße (gewogenes Mittel)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n g_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n g_i} \quad (12)$$

und die zu diesem Mittelwert zugehörige Messunsicherheit

$$\Delta x = \frac{\sum_{i=1}^n g_i \cdot \Delta x_i}{\sum_{i=1}^n g_i} \quad (13)$$

Dies Verfahren kommt im Physiklabor z.B. beim Versuch *Brennweite dünner Sammellinsen* bei der Brennweitenbestimmung zum Tragen.

Literaturhinweise

/1/ Skript Elektrische Messtechnik 1, FH Hannover, ab Auflage 1998

/2/ DIN-Norm 1319, Teil 3, gültige Fassung Mai 1996 (Stand Sep. 2011)

/3/ Gerthsen, Meschede, (Vogel) : Physik, Springer, Berlin; 22. Auflage 2003
Kap. 1.1.7: *Messfehler*

Anhang

A1 : Herleitung und Beispiel für Spezialfall Multiplikation bzw. Division (Kap. 3.1.1.)

Die maximale, relative Messunsicherheit in Gl. (7a) soll im Folgenden für den Fall von zwei Eingangsvariablen mit unterschiedlichem Exponenten hergeleitet werden.

Geht man von allgemeinen Funktionen z_I, z_{II} mit $a = \text{const.}$ aus

$$z_I = f(x_1, x_2) = a \cdot x_1^p \cdot x_2^q$$
$$z_{II} = f(x_1, x_2) = a \cdot \frac{x_1^p}{x_2^q} = a \cdot x_1^p \cdot x_2^{-q}$$

dann folgt für die Multiplikation z_I gemäß Gl. (6a)

$$\Delta z_I = \left| p \cdot a \cdot x_1^{p-1} \cdot x_2^q \cdot \Delta x_1 \right| + \left| q \cdot a \cdot x_1^p \cdot x_2^{q-1} \cdot \Delta x_2 \right|$$

und durch Division mit $z_I = a \cdot x_1^p \cdot x_2^q$ weiter

$$\frac{\Delta z_I}{z_I} = \left| \frac{p \cdot a \cdot x_1^{p-1} \cdot x_2^q \cdot \Delta x_1}{a \cdot x_1^p \cdot x_2^q} \right| + \left| \frac{q \cdot a \cdot x_1^p \cdot x_2^{q-1} \cdot \Delta x_2}{a \cdot x_1^p \cdot x_2^q} \right| = \left| p \cdot \frac{\Delta x_1}{x_1} \right| + \left| q \cdot \frac{\Delta x_2}{x_2} \right|$$

Dies bestätigt die Gültigkeit der Formel (7a) für die Multiplikation unter Berücksichtigung der Exponenten der jeweiligen Eingangsgrößen.

Für die Division z_{II} gilt gemäß Gl. (6a)

$$\Delta z_{II} = \left| p \cdot a \cdot x_1^{p-1} \cdot x_2^{-q} \cdot \Delta x_1 \right| + \left| (-q) \cdot a \cdot x_1^p \cdot x_2^{-q-1} \cdot \Delta x_2 \right|$$

und durch Division mit $z_{II} = a \cdot x_1^p \cdot x_2^{-q}$ weiter

$$\frac{\Delta z_{II}}{z_{II}} = \left| \frac{p \cdot a \cdot x_1^{p-1} \cdot x_2^{-q} \cdot \Delta x_1}{a \cdot x_1^p \cdot x_2^{-q}} \right| + \left| \frac{(-q) \cdot a \cdot x_1^p \cdot x_2^{-q-1} \cdot \Delta x_2}{a \cdot x_1^p \cdot x_2^{-q}} \right| = \left| p \cdot \frac{\Delta x_1}{x_1} \right| + \left| q \cdot \frac{\Delta x_2}{x_2} \right|$$

Dies bestätigt ebenfalls die Gültigkeit der Formel (7a) für die Division unter Berücksichtigung der Exponenten der jeweiligen Eingangsgrößen.

Völlig analog kann auch die Formel (7b) für die *wahrscheinliche* relative Messunsicherheit hergeleitet werden.

Als einfaches Beispiel dient die Leistungsbestimmung durch eine Spannungsmessung mit einer relativen Messunsicherheit von 0,1% an einem ohmschen Widerstand, dessen Wert mit einer Messunsicherheit von 1,5% angegeben ist. Es gilt

$$P = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = f(U, R)$$

Im Ergebnis P sind die Eingangsgrößen U, R nur in Multiplikation bzw. Division enthalten. Unter Berücksichtigung des Exponenten 2 bei U gilt mit Gl. (7a)

$$\frac{\Delta P}{P} = 2 \cdot \left| \frac{\Delta U}{U} \right| + \left| \frac{\Delta R}{R} \right| = 0,001 + 0,015 = 0,016 \equiv 1,6\%$$

und mit (7b)

$$\frac{\Delta P}{P} = \sqrt{\left(2 \cdot \frac{\Delta U}{U}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2} = \sqrt{(0,001)^2 + (0,015)^2} = 0,0150 \equiv 1,5\%$$

Die relative Messunsicherheit ist unabhängig vom absoluten Zahlenwert der Leistung. Aus dem berechneten Zahlenwert der absoluten Leistung über $P = \frac{U^2}{R}$ kann dann auch die absolute Messunsicherheit ΔP berechnet werden.

Das einfache Beispiel in 3.3 der Leistungsbestimmung $P = f(U, I) = U \cdot I$ durch Strom- und Spannungsmessung soll ebenfalls zur Überprüfung dienen. Da es sich um eine reine Multiplikation handelt, gilt für die *maximale*, relative Messunsicherheit nach (7a)

$$\frac{\Delta P}{P} = \left| \frac{\Delta I}{I} \right| + \left| \frac{\Delta U}{U} \right| = \left| \frac{0,002A}{0,1A} \right| + \left| \frac{1V}{220V} \right| = 0,02 + 0,04545 = 0,024545$$

Für die maximale (absolute) Messunsicherheit gilt dann $\Delta P = 0,024545 \cdot P$ und mit $P = U \cdot I = 220V \cdot 0,1A = 22W$ ergibt sich

$$\Delta P = 0,024545 \cdot P = 0,024545 \cdot 22W = 0,54W$$

derselbe Zahlenwert wie auch in dem oberen Beispiel in 3.3. mit Hilfe des totalen Differentials berechnet.