

4.3 Statistik des radioaktiven Zerfalls

Stichworte: Radioaktivität, α -, β -, γ -Strahlung, Geiger-Müller-Zählrohr, Statistik, Poisson- und Gauß-Verteilung, Standardabweichung, Reinheitszahl, statistische Analyse.

1 Theoretische Grundlagen

Die radioaktive Umwandlung von Atomkernen folgt statistischen Gesetzen. Dies bedeutet, dass nicht der genaue Zeitpunkt des einzelnen radioaktiven Zerfalls vorhersagbar ist, sondern nur, dass er mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% innerhalb der Halbwertszeit $T_{1/2}$ liegt. Da die Zerfallereignisse einer Strahlungsquelle keine Korrelationen untereinander besitzen, sind sie zeitlich zufällig verteilt. Abb. 4.3-1 verdeutlicht, dass diese zufällige zeitliche Verteilung die Ursache für die Variation der beobachteten Ereigniszahlen N bei gleicher Messzeit ΔT ist. Die mathematisch exakten Verteilung der Ereigniszahlen N für den Erwartungswert $\langle N \rangle$ sind Poisson-Verteilungen $P(N, \langle N \rangle)$. Für $\langle N \rangle \rightarrow \infty$ geht die Poisson- in eine Gauß-Verteilung $G(N, \langle N \rangle)$ über.

$$\lim_{\langle N \rangle \rightarrow \infty} P(N, \langle N \rangle) = \lim_{\langle N \rangle \rightarrow \infty} \left(\frac{\langle N \rangle^N}{N!} \cdot \exp(-\langle N \rangle) \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle N \rangle}} \cdot \exp\left(-\frac{(N - \langle N \rangle)^2}{2\langle N \rangle}\right) = G(N, \langle N \rangle)$$

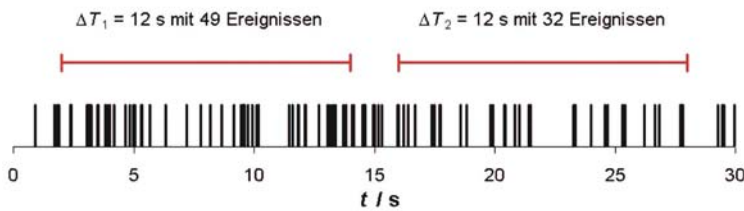


Abb. 4.3-1 Mathematische Simulation einer Zeitverteilung mit 100 Zerfallereignissen (senkrechte Marken) in einem Zeitintervall von 30 s. Die mittlere Zerfallsrate beträgt $3,33 \text{ s}^{-1}$. In Messzeiten von 12 s erwartet man im Mittel 40 Zerfallereignisse. Die zufällig ausgewählten Messzeitintervalle $\Delta T_1 = \Delta T_2 = 12 \text{ s}$ enthalten im vorliegenden Fall 49 und 32 Ereignisse.

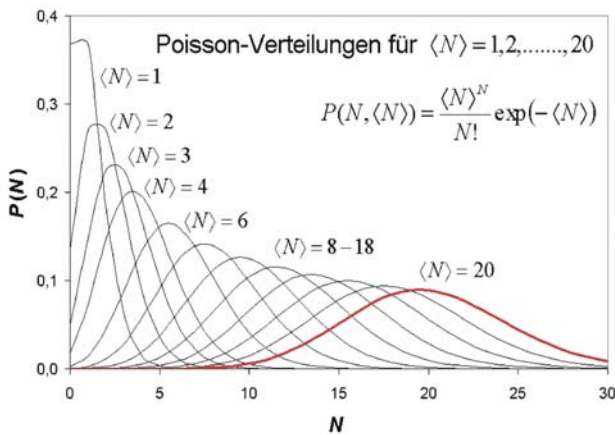


Abb. 4.3-2 Poisson-Verteilungen für Erwartungswerte $\langle N \rangle = 1, 2, \dots, 20$. Für kleine $\langle N \rangle$ sind die Verteilungen schief-symmetrisch, je größer $\langle N \rangle$, um so mehr nähern sie sich symmetrischen Glockenkurven an (vergl. $\langle N \rangle = 20$).

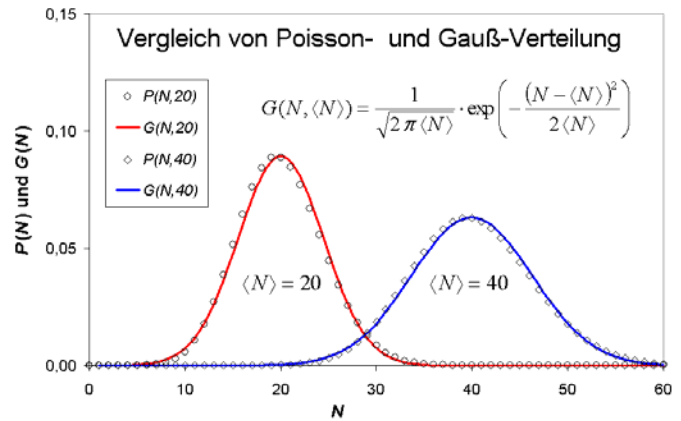


Abb. 4.3-3 Vergleich von Poisson- ($P(N)$ und Gauß-Verteilung $G(N)$ für $\langle N \rangle = 20$ und $\langle N \rangle = 40$. Für $\langle N \rangle \geq 20$ ist eine akzeptable Übereinstimmung gegeben. Wegen der günstigeren mathematischen Eigenschaften verwendet man in der Strahlungsmesstechnik vorzugsweise die Gauß-Verteilungen.

Versuch 4.3

Physikalisches Praktikum

Die Varianz der Poisson-Verteilung ist σ^2 mit $\sigma^2 = \langle N \rangle$. Die Standardabweichung σ ist die Wurzel aus der Varianz ($\sigma = \sqrt{\langle N \rangle}$). Die Gauß-Verteilung kann mit Hilfe von σ in folgender Form geschrieben werden:

$$G(N, \langle N \rangle, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{N - \langle N \rangle}{\sigma}\right)^2\right)$$

σ ist ein Maß für die Breite der Glockenkurve. Die Fläche (Integral) zwischen $\langle N \rangle - \sigma$ und $\langle N \rangle + \sigma$ beträgt 68,3% der Gesamtfläche, die auf 100% normiert ist. Zur Prüfung einer experimentellen Häufigkeitsverteilung kann diese entweder direkt mit der Gauß-Verteilung $G(N)$ oder als Häufigkeitssummenverteilung mit der Integralfunktion $W(N)$ verglichen werden. Die Häufigkeitssummenverteilungen werden dabei zweckmäßigerweise auf Wahrscheinlichkeitspapier aufgetragen, da die Gaußsche Integralfunktion $W(N)$ in dieser Darstellung einer Geraden entspricht.

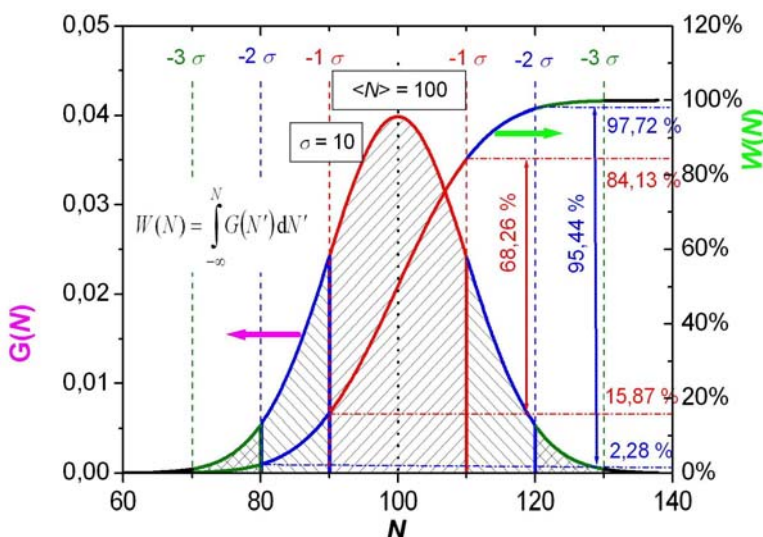


Abb. 4.3-4 Darstellung der Gauß-Verteilung $G(N)$ und ihrer Integralfunktion $W(N)$ für $\langle N \rangle = 100$ und $\sigma = \sqrt{\langle N \rangle} = 10$. Der Bereich $\pm 1\sigma$ entspricht 68,26 % des Gesamtintegrals. Für $\pm 2\sigma$ ist der entsprechende Wert 95,44 %, für $\pm 3\sigma$ entspricht er 97,72 %. Zeichnet man die Integralfunktion auf Wahrscheinlichkeitspapier, ergibt sich eine Gerade.

Misst man wiederholt die Strahlungsintensität eines radioaktiven Präparates mit langer Halbwertszeit, so erhält man in konstanten Messzeiten ΔT unterschiedliche Impulszahlen N_i . Der Erwartungswert $\langle N \rangle$ kann bei n Einzelmessungen N_i durch den Mittelwert \bar{N} abgeschätzt werden:

$$\langle N \rangle \cong \bar{N} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n N_i$$

Der Standardabweichung σ entspricht näherungsweise der empirischen Standardabweichung s :

$$\sigma \cong s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (N_i - \bar{N})^2},$$

und der Standardabweichung des Erwartungswertes $\sigma_{\langle N \rangle}$ die Standardmessunsicherheit $u(\bar{N})$

$$\sigma_{\langle N \rangle} \cong u(\bar{N}) = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{(n-1)n} \cdot \sum_{i=1}^n (N_i - \bar{N})^2}.$$

Versuch 4.3

Physikalisches Praktikum

Bei einer endlichen Messreihe gilt näherungsweise $\sigma \cong \sqrt{N}$ oder als (grobe) Schätzung $\sigma \approx \sqrt{N_i}$.

Die Standardabweichung des Erwartungswertes $\sigma_{\langle N \rangle}$ kann als $\sigma_{\langle N \rangle} \cong \sigma_N = \sqrt{\frac{N}{n}}$ abgeschätzt werden. Die Beziehung $\sigma \approx \sqrt{N_i}$ ist bei praktischen Messaufgaben nützlich, da sie einfach und schnell eine Abschätzung für die zu erwartende Streuung der Impulszahlen ermöglicht.

Tabelle 1: Absolute und relative Standardabweichungen als Funktion der Impulszahlen

Anzahl der Impulse N	Standardabweichung absolut σ	Standardabweichung relativ σ/N
10	3,2	32 %
100	10	10 %
1000	32	3,2 %
10000	100	1 %

Als Reinheitszahl RZ definiert man das Verhältnis aus der empirischen Standardabweichung s und der nach der Poisson-Statistik erwarteten Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\langle N \rangle}$, $RZ = \frac{s}{\sigma}$. Wenn die

Reinheitszahl in der Nähe von 1 liegt, beruht die Streuung der Einzelmessungen auf rein statistischen Einflüssen. Bei einer größeren Abweichung mit $RZ > 1$ kann eine Beeinflussung durch weitere Parameter angenommen werden.

2 Aufgaben

- Bestimmung der Nullrate (Untergrundrate) ohne radioaktives Präparat.
- Auf der Basis von ca. 100 Einzelmessungen der Impulszahl mit einem radioaktiven Präparat soll die Reinheitszahl RZ ermittelt werden und die beobachtete Häufigkeitsverteilung mit der Gauß-Verteilung verglichen werden. Man erstelle bereits während des Laborversuchs eine (vorläufige) graphische Darstellung der Häufigkeitsverteilung.
- Man trage die Häufigkeitssummenverteilung auf Wahrscheinlichkeitspapier auf und ermittle die Integralfunktion der Gauß-Verteilung $W(N)$ als Ausgleichsgerade.
- Bestimmen Sie die Nutzrate als der Differenz von Messrate und Nullrate.

3 Erforderliche Geräte

Die Messanordnung besteht aus einem Geiger-Müller-Detektor (**GM**) mit Nachweiselektronik (**E**) und einem radioaktiven Präparat (**Q**) mit einem Abschirmbehälter (**A**) (vom Assistenten bereitgestellt). Das Präparat enthält ein Nuklid (Isotop: ^{90}Sr) mit sehr langer Halbwertszeit ($T_{1/2} = 28,6$ a), das β -Strahlung (Elektronen) aussendet. Die Messbedingungen (Abstand Präparat – Detektor, Hochspannung am Detektor, Messzeit) müssen konstant gehalten werden.

(Hinweis: Die Aktivität der Quelle ist gering und die Reichweite der β -Strahlung begrenzt. Bei einem Abstand von mehr als 20 cm tritt keine nennenswerte Strahlungsdosis auf.)

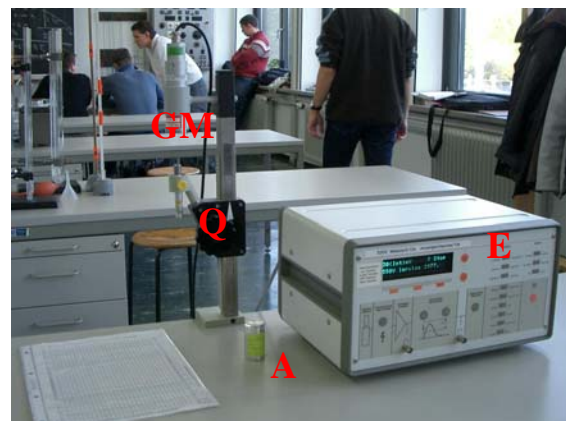


Abb. 4.3-5 Experimenteller Aufbau

Inbetriebnahme: Die Messelektronik wird an der Rückseite des Gerätegehäuses eingeschaltet. Anschließend muss: (1) die **ENTER**-Taste (\downarrow), (2) die Taste unter "**Lehre**" (3) die Taste unter "**GM**" gedrückt werden. Es erscheint auf dem Display die Information:

30(Int)mV	T Stop
550 V	Impulse

Für die Messungen muss nur noch **START/STOP** gedrückt werden.

4 Versuchsdurchführung

- Zunächst bestimme man die Nullrate (etwa 10 Messungen), also die Zählrate, die auch ohne Verwendung eines radioaktiven Präparats vom Detektor angezeigt wird. Sie entsteht durch natürliche Radioaktivität in den Umgebungsmaterialien und der Luft sowie durch kosmische Strahlung.
- Man messe $n = 100$ mal mit dem radioaktiven Präparat (^{90}Sr) unter konstanten Messbedingungen. Die Impulszahlen für die Messzeit von 12 s sollten im Bereich von 3000 – 5000 liegen.
- Nach den ersten zehn Messungen ist ein vorläufiger Mittelwert \bar{N}_0 zu bilden und ein erster Schätzwert für die Standardabweichung zu berechnen: $\sigma_0 \cong \sqrt{\bar{N}_0}$. Im Intervall $(N_0 - 3\sigma_0) < N < (N_0 + 3\sigma_0)$ werden praktisch alle Messwerte (99,7 %) erwartet. Dieses Intervall teile man in k Klassen, wobei $k \approx \sqrt{n}$ (für 100 Messungen $k \approx 10$) empfohlen wird. Die Klassenbreite ergibt sich zu $\frac{6}{k} \cdot \sigma_0$. Man kann eine ganzzahlige Näherung verwenden.
- Während des Versuchs soll das Entstehen der absoluten Häufigkeitsverteilung in Form einer Strichliste beobachtet werden. Dazu trage man für jeden Messwert einen waagerechten Strich in die zugehörige Klasse ein. Anfängliche Unsymmetrien der Strichlistenverteilung werden bei wachsender Zahl der Messungen weitgehend verschwinden. Bei 100 Messungen werden meist (jedoch nicht immer) Verteilungen mit Gauß-Kurvenform erreicht.

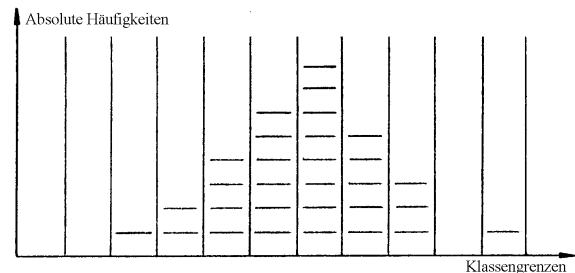


Abb 4.3-6 Strichlistenverteilung als Näherung für die Verteilungsfunktion.

Beispiel: Alle Impulszahlen sind bezogen auf dieselbe Messzeit (z. B. $\Delta T=12$ s): Mittelwert = 3600 Impulse, Standardabweichung = 60 Impulse, Gesamtbreite der zehn Klassen = 360 Impulse, Klassenbreite = 36 Impulse
Klassengrenzen: 1. Klasse 3420 bis 3456, 2. Klasse 2456 bis 3492,.....10. Klasse 3744 bis 3780.

5 Auswertung

- Man berechne \bar{N} , s , $u(\bar{N})$, $\sigma \cong \sqrt{\bar{N}}$ und $\sigma_{\bar{N}} \cong \sqrt{\frac{\bar{N}}{n}}$ und vergleiche die Ergebnisse. Man berechne die Reinheitszahl RZ . Die Messrate ist: $R_M = \frac{\bar{N}}{\Delta T}$. Sie setzt sich zusammen aus der

Versuch 4.3

Physikalisches Praktikum

Nutzrate R_N und der Nullrate R_0 , $R_M = R_N + R_0$. Bestimmen Sie R_0 und R_N . (Geben Sie vollständige Ergebnisse an, also Ergebnisgrößen und (Standard-)Messunsicherheiten.)

- Teilen Sie den Bereich zwischen dem größten und dem kleinsten Wert von N_i in k gleich große Intervalle (Klassen, Anzahl $k \cong \sqrt{n}$, wir zuvor.) und verteilen Sie die n -Messwerte N_i auf die k -Klassen. Sie erhalten so die absolute Häufigkeitsverteilung. Dividiert man diese durch n so erhält man die relative Häufigkeitsverteilung, die als Histogramm zusammen mit einer berechneten Gauß-Verteilung $G(N)$ dargestellt werden kann. Zur Normierung multipliziert man die Gauß-Verteilung mit ΔN_K .

(Begründung: Das Integral der reinen Gauß-Verteilung ist 1. Die Summe der relativen Häufigkeitsverteilung ist zwar ebenfalls 1, aber bei einer Histogrammdarstellung ist die Gesamtfläche $1 \cdot \Delta N_K$, wobei ΔN_K die Klassenbreite, also gleich der Breite der Säulen im Histogramm ist).

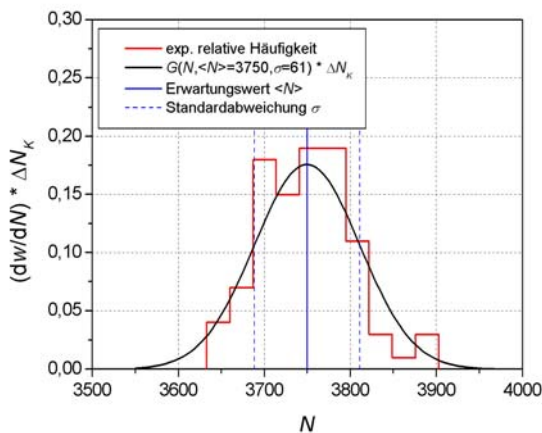


Abb. 4.3-7 Vergleich einer gemessenen Häufigkeitsverteilung (rot) mit einer Gaußverteilung (schwarz), die für $\langle N \rangle = 3750$ und $\sigma = \sqrt{N} = 61$ berechnet wurde. Durch Multiplikation der Gauß-Verteilung mit dem Faktor $\Delta N_K = 36,7$ (=Klassenbreite) erhalten beide Verteilungen die gleiche Normierung.

- Zusätzlich soll ein Vergleich zwischen der gemessenen Häufigkeitssummenverteilung (erster Wert = Inhalt Klasse 1, zweiter Wert = Summe von Klasse 1 + Klasse 2,) mit der Gaußschen Integralfunktion $W(N)$ (siehe Abb. 4.3-4) durchgeführt werden. Dazu zeichne man die Häufigkeitssummen auf Wahrscheinlichkeitspapier. Eine Gaußsche Integralfunktion $W(N)$ ergibt beim Auftragen auf Wahrscheinlichkeitspapier eine Gerade. Wenn die diskreten Punkte der experimentellen Häufigkeitssummenverteilung einen linearen Zusammenhang erkennen lassen, bestätigt dies, dass die Messwerte einer Gaußschen Normalverteilung entsprechen und die Ausgleichsgerade ist dann eine Näherung für die der zugehörigen Integralfunktion $W(N)$. Die Auswertung mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitspapier bietet auch die Möglichkeit, Erwartungswert $\langle N \rangle$ und Standardabweichung σ zu bestimmen: Dem Ordinatenwert 50% entspricht auf der Abszissenachse der Erwartungswert $\langle N \rangle$, den Ordinatenwerten 15,9% und 84,1% entsprechen Abszissenwerte, deren Differenz gleich der doppelten Standardabweichung 2σ ist.

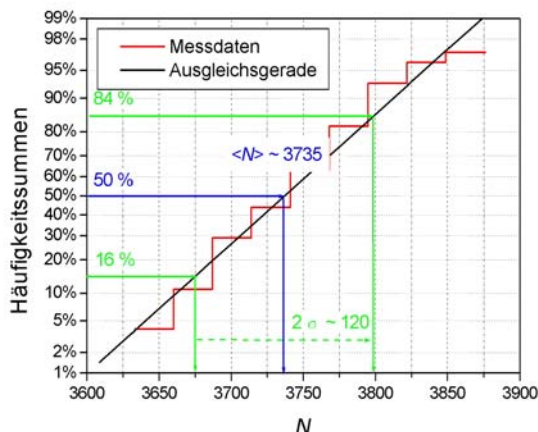


Abb. 4.3-8 Häufigkeitssummenverteilung der Messwerte aus Abb. 4.3-7 (rot) aufgetragen mit einer Wahrscheinlichkeitsordinate. Die Ausgleichsgerade (schwarz) entspricht der Integralfunktion der Gauß-Verteilung $W(N)$ und kann in gezeigter Weise zur Abschätzung des Erwartungswerts $\langle N \rangle$ und der Standardabweichung σ dienen.